

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

**В.А. Тарлыков**

# **КОГЕРЕНТНАЯ ОПТИКА**

**Учебное пособие**



**Санкт-Петербург**

**2011**



Тарлыков В.А. Когерентная оптика. Учебное пособие по курсу «Когерентная оптика». – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 168 с.

Издание содержит сведения об оптическом сигнале, преобразовании Фурье, обобщенных функциях, функции корреляции и свертки, пространственной фильтрации; особенностях толкования понятия дифракции; рассмотрено соотношение между квантовой и волновой природой света, представлена специфика лазерного излучения: пространственная и временная когерентность, механизм формирования спеклов и их свойства; приведены сведения об оптике винтовых полей и световом давлении.

Издание адресовано студентам, обучающимся по направлению подготовки 200500 – «Лазерная техника и лазерные технологии», 200400 – «Оптотехника» и специальности – 200201 - Лазерная техника и лазерные технологии и может быть также использовано при подготовке специалистов, которым требуются знания в области лазерной физики, техники и технологии.

Рекомендовано к печати УМО вузов РФ по образованию в области приборостроения и оптотехники для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 200200 – Оптотехника и специальности 200201 – Лазерная техника и лазерные технологии.

Протокол № 5 от 30.06.10 заседания Президиума Совета УМО.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2011

© В.А.Тарлыков, 2011

## Предисловие

Данное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки 200500 - Лазерная техника и лазерные технологии, 200400 – Оптотехника и специальности – 200201 - Лазерная техника и лазерные технологии и может быть также использовано при подготовке специалистов, которым требуются знания в области лазерной физики, техники и технологии.

В настоящее время оптика стала одним из главных источников научно-технического прогресса в приборостроении. Это связано, прежде всего, с широким использованием вынужденного излучения, источником которого служит лазер. Использование лазера способствовало превращению оптических приборов в средство активного воздействия на окружающий мир и передачи энергии на расстояние. И в первую очередь это связано с когерентными свойствами их излучения: высокой направленностью и монохроматичностью.

Лазерный луч как технологический инструмент не имеет себе равных по степени гибкости, быстрдействию и износоустойчивости. Возможности высокой концентрации лазерного излучения в пространстве и во времени открыли новые перспективы для размерной и локальной поверхностной обработки материалов, бесконтактной диагностики процессов и управления ими, прецизионных измерений, регистрации, обработки и передачи информации, для биомедицины и биотехнологий.

Автором откорректирован текст пособия, исправлены замеченные опечатки, дополнены примерами разделы 2, 3 и 6, написан раздел 4 «Дифракция и интерференция света», существенно дополнен раздел 7. «Когерентность лазерного излучения», представлен «Глоссарий».

Раздел 5. «Квантовая природа электромагнитного излучения. Ограничение разрешающей способности оптической системы и информационной емкости оптических сигналов» и параграф 2.7. Фурье-образы наиболее часто встречающихся в оптике двумерных сигналов и их свойства подготовлен Магуриным Виталием Геннадьевичем.

## 1. Оптический сигнал и оптическая система

Оптические приборы во многих случаях определяют прогресс в развитии больших и важных направлений науки, техники и производства. На современном этапе развития оптические приборы представляют весьма широкие возможности для познания окружающего мира, приема, передачи и обработки информации.

Восприятие, передача и преобразование информации по-прежнему занимают ведущее место в оптическом приборостроении.

Любая информация содержит след событий, состоящих в изменении состояния объектов или процессов. Событие порождает сообщение, которое представляет его описание. Именно в сообщении и содержится информация. Для передачи сообщения используется сигнал – физический процесс, несущий в себе информацию о состоянии системы и пригодный для передачи на расстояние.

Сигнал может быть детерминированным и случайным. Он может представлять собой простое гармоническое колебание, быть периодическим или непериодическим процессом.

### 1.1 Оптические системы, операторы, функционалы. Типы оптических систем

К описанию многих оптических явлений, связанных с переносом информации оптическими волнами, применимы методы теории систем и преобразований, в общем, виде применяемые для всех систем, преобразующих сигналы и к любым видам сигналов. Однако, как и в каждой науке в оптике имеется своя специфика их применения. Мерой информационной емкости в оптике является число битов, которое можно извлечь из формируемого системой изображения. Сигналы в оптике описываются функциями пространственных координат. Обработка сигналов при этом осуществляется системой с двумерным входом и выходом.

Термин «система» очень часто используется в научной литературе. Он имеет много значений и в зависимости от контекста наполняется различным содержанием. В классической оптике под оптической системой чаще всего понимают «совокупность оптических деталей (линз, призм, зеркал, плоскопараллельных пластин и т.д.), предназначенную для определенного формирования пучков световых лучей». В общем, можно сформулировать так: система – это «черный ящик», преобразующий множество входных сигналов в соответствующее ему множество выходных сигналов. Если преобразование однозначное, систему называют детерминированной.

Чаще всего мы под системой будем понимать устройство, преобразующее по какому-либо закону входные сигналы  $f$  в выходные  $g$ .

Системы, используемые для преобразования сигналов, имеют самые разнообразные физические характеристики и могут классифицироваться по различным признакам.

Важнейшим классификационным признаком является линейность или нелинейность системы.

Линейными называются системы, для которых выполняется принцип суперпозиции: реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности. Системы, для которых принцип суперпозиции не выполняется, называются нелинейными.

Следующим критерием классификации систем является постоянство или непостоянство их характеристик во времени. Если произвольная задержка подаваемого на вход сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы, система называется стационарной, или системой с постоянными параметрами. В противном случае система называется нестационарной, параметрической или системой с переменными параметрами.

Два указанных способа классификации делят системы на четыре класса. В данном курсе мы будем рассматривать только линейные стационарные системы.

## 1.2 Оптический сигнал и его преобразование

В оптике под сигналами обычно понимают распределения амплитуды и фазы светового поля в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны, либо распределения интенсивности поля в этих плоскостях, описываемые двумерными функциями координат.

Независимо от физической природы сигналы в их математическом представлении образуют множества, для элементов которых определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие требованиям аддитивности, коммутативности и ассоциативности. Такие множества являются линейными (векторными) пространствами над полем комплексных чисел, и на них могут быть заданы линейные операторы. Оператором называют правило, по которому осуществляется отображение одного множества элементов  $S_1$  в другое  $S_2$ . Мы будем иметь дело с линейными операторами.

Все виды сигналов можно разделить на две группы: детерминированные и случайные.

Детерминированные, это такие сигналы, параметры и мгновенные значения которых могут быть представлены с вероятностью, равной единице, в любой последующий момент времени, если стали известны параметры и мгновенные значения их в один из предшествующих моментов времени. Детерминированные сигналы можно подразделить на периодические и непериодические.

Периодическим называется такой сигнал, который может быть представлен в виде  $s(t) = s(t + nT)$ , где период  $T$  – конечный временной интервал, а  $n$  – любое целое число. Простейшим представителем периодических детерминированных сигналов является гармоническое колебание:

$$s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad -\infty < t < \infty,$$

где  $A$  – амплитуда,  $T$  – период,  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – фаза колебания. Строго гармоническое колебание называется монохроматическим. На практике колебание всегда имеет конечную ширину спектра.

Непериодическим детерминированным сигналом называется такой, который не может быть представлен в виде  $s(t) = s(t + nT)$ . Непериодический сигнал, как правило, ограничен во времени.

Случайными называются сигналы, параметры и мгновенные значения которых могут быть представлены в последующие моменты времени с вероятностью, меньшей единицы, если оказались известными их параметры и мгновенные значения в один из предшествующих моментов времени. Сигналы, несущие информацию, являются случайными. Детерминированные сигналы информации не переносят. Аналогичным образом обстоит дело и с пространственными сигналами, в которых аргументами являются пространственные координаты.

В когерентной оптике под сигналом понимают распределение амплитуды и фазы световой волны в различных плоскостях оптической системы, перпендикулярных к ее оси. Для описания этого распределения вводят понятие аналитического сигнала – непрерывной комплексной функции трех вещественных переменных: пространственных координат  $x$ ,  $y$  и времени  $t$ . Вещественная часть этой функции совпадает с реальным физическим сигналом, а мнимая часть представляет преобразование Гильберта по переменной  $t$  от ее вещественной части.

Соотношение между физическим и аналитическим сигналами такое же, как между функциями  $\cos(\omega t + \varphi)$  и  $\exp i(\omega t + \varphi)$ : при переходе от вещественной функции к комплексной опускают члены с отрицательными частотами и удваивают коэффициенты при членах с положительными частотами. В случае монохроматического сигнала

$$f(x, y, t) = A(x, y) \cos[\omega t + \varphi(x, y)]$$

аналитический сигнал записывается в виде:

$$\varpi(x, y, t) = F(x, y) \exp(-i\omega t),$$

где

$$F(x, y) = A(x, y) \exp[i\varphi(x, y)].$$

Множитель  $\exp(-i\omega t)$  обычно опускают, рассматривая в качестве сигнала стоящую перед этим множителем комплексную функцию координат  $F(x, y)$ , называемую комплексной амплитудой, или фазором.

## 2. Преобразование Фурье

### 2.1. Определение преобразования Фурье

Анализ Фурье и теория линейных систем образуют фундамент, на котором построены теории формирования изображения, оптической обработки информации и голографии.

По определению преобразованием Фурье функции  $f(x)$  (действительной или комплексной) называется интегральная операция

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi(ux)] dx.$$

Преобразование такого вида представляет собой функцию независимой переменной  $u$ , называемой частотой. Обратное преобразование Фурье функции  $F(u)$  записывается следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi(ux)] du.$$

Необходимым условием существования преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость функций  $f(x)$  и  $F(u)$ , т.е. чтобы значения интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)| du$$

были конечными. Функции, используемые в оптике, определены лишь на ограниченном интервале и для них это требование соблюдается всегда (переменные  $x$  и  $u$  называются сопряженными). Различия между прямым Фурье-образом и обратным Фурье-образом заключается в различных знаках, содержащихся в экспонентах выражений, а также в наличии множителя  $1/2\pi$  в формуле обратного преобразования.

В литературе встречаются и другие определения преобразования Фурье, отличающиеся от приведенного здесь как знаком в экспоненте, так и численными коэффициентами, стоящими перед интегралом.

Аналогичным образом определяется и двумерное Фурье-преобразование. Прямое

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (1.1)$$

и обратное

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] dudv.$$



Введем в выражении (1.1) обозначения  $u = x/\lambda z$ ;  $v = y/\lambda z$ .

Величины  $u$  и  $v$  обычно называются частотами. Тогда выражение (1.1) примет вид

$$u_p = \frac{j}{\lambda z} e^{-jkz} F(u, v),$$

где

$$F(u, v) = \int_{\sigma} f(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta.$$

Отсюда видно, что выражение (1.1) с точностью до множителя представляет собой Фурье-образ распределения поля на поверхности  $\sigma$  как функцию пространственных частот  $u$  и  $v$ . Аналогичным образом можно преобразовать и выражение для сферической системы координат, введя обозначения

$$u = \frac{1}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi.$$

Большое распространение имеет и частный случай двумерного преобразования Фурье для функций, обладающих осевой симметрией, называемый преобразованием Фурье-Бесселя или преобразованием Ганкеля нулевого порядка. Если функция обладает осевой симметрией ее можно записать как функцию только радиуса  $r$ . Соответственно, Фурье-образ становится функцией  $\rho$ , не зависящей явно от угла  $\varphi$ .

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(2\pi r \rho) dr,$$

где  $J_0(2\pi r \rho)$  - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Учитывая, что

$$\exp[-j2\pi(ux + vy)] = \cos[2\pi(ux + vy)] - j \sin[2\pi(ux + vy)],$$

прямое преобразование Фурье можно записать в виде суммы косинус - и синус - преобразований:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cos[2\pi(ux + vy)] dx dy - j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \sin[2\pi(ux + vy)] dx dy.$$

В общем случае функция  $F(u, v)$  комплексная, и мы можем записать

$$F(u, v) = \text{Re}[F(u, v)] - j \text{Im}[F(u, v)].$$

Спектр амплитуд и фаз записывается соответственно в виде

$$|F(u, v)| = \sqrt{\{\text{Re}[F(u, v)]\}^2 + \{\text{Im}[F(u, v)]\}^2};$$

$$\varphi(u, v) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(u, v)]}{\operatorname{Re}[F(u, v)]} \right\}.$$

Действительная часть Фурье-образа всегда четная функция, мнимая часть Фурье-образа - всегда нечетная функция. Комплексность спектра означает сдвиг отдельных его составляющих по фазе.

## 2.2 Представление поля в дальней зоне через интеграл Фурье

В когерентной оптике преобразование Фурье имеет реальную физическую интерпретацию. Оно описывает дифракцию Фраунгофера при прохождении когерентного пучка через оптическую систему с достаточно малой угловой апертурой. Действительно, любая дифракционная оптическая система с помощью когерентных волн кроме изображения объекта, определяемого законами геометрической оптики ставит ему в соответствие двумерный Фурье-образ на плоскости, определяемый законами дифракции.

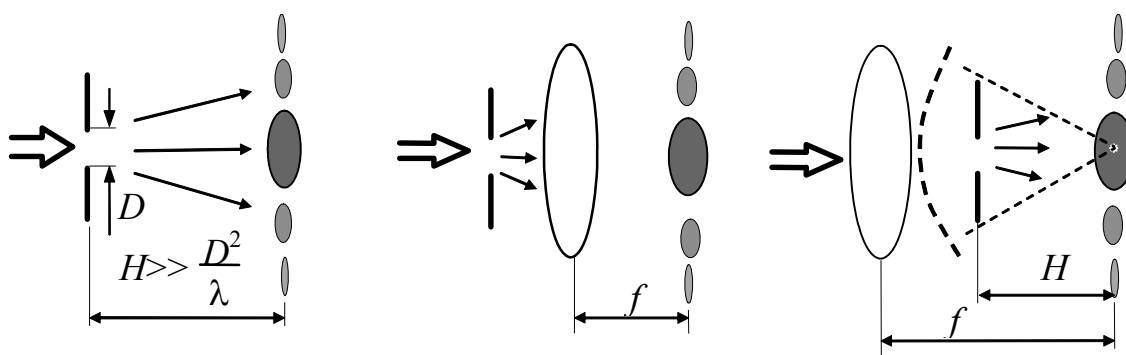


Рис. 2.1. Условия наблюдения дифракции Фраунгофера  
*а. Дальняя зона*                      *б. Фокальная плоскость*                      *с. Сходящаяся волна*

Дифракция Фраунгофера наблюдается, если выполняется условие дальней зоны:  $H \gg D^2/\lambda$ ; в фокальной плоскости оптической системы; в плоскости схождения волны (рис. 2.1).

Одно из основных преимуществ использования дифракции Фраунгофера - инвариантность к положению объекта дифракции относительно плоскости регистрации. В данном случае это означает, что независимо от положения объекта в пучке лазера вид дифракционного распределения интенсивности в плоскости регистрации не изменяется.

### 2.3. Основные свойства преобразования Фурье

Знание основных свойств преобразования Фурье позволяет значительно упростить анализ основных закономерностей пространственного спектра.

Чтобы показать, что функция  $f(x)$  и  $F(u)$  связаны интегральным преобразованием будем писать  $f(x) \Leftrightarrow F(u)$ .

**1. Свойства линейности.** Пусть  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$  Фурье-образы функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно, а  $a_1$  и  $a_2$  - произвольные комплексные числа. В этом случае Фурье-образ функции  $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$  равен

$$F(u) = a_1 F_1(u) + a_2 F_2(u).$$

Таким образом, спектр пространственных частот сложного объекта любой произвольной формы можно получить как сумму спектров простых геометрических фигур, пространственные спектры которых известны, что значительно упрощает вычислительные процедуры.

**2. Изменение масштаба.** Пусть  $a$  действительное число, тогда

$$f(ax) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right)$$

Если  $a > 0$ , то

$$f(ax) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right),$$

если  $a < 0$ ,

$$f(ax) \Leftrightarrow -\frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right).$$

Это свойство является очень важным для дифракции. Оно позволяет связать изменение размера изделия с изменением периода пространственного спектра. Показывает их обратно пропорциональную зависимость.

**3. Свойства сдвига.** Если функцию  $f(x)$  сдвинуть на величину  $a$ , то мы получим

$$f(x - a) \Leftrightarrow \exp(-jua)F(u).$$

Из этого выражения следует, что смещение функции  $f(x)$  на величину  $a$  приводит лишь к дополнительному вращению фазы на величину  $ua$ , а модуль Фурье-образа остается неизменным.

Из этого свойства следует одно из основных достоинств приборов и устройств, основанных на дифракции - инвариантность к смещениям исследуемого объекта. (**По определению:** система, создающая изображение, является пространственно инвариантной, если изображение точечного источника меняет только положение, но не свою функциональную форму по мере того, как этот источник пробегает поле предмета)

Существует и обратное свойство

$$f(x) \exp(\pm ju_0x) \Leftrightarrow F(u \pm u_0)$$

$$f(x) \cos u_0x \Leftrightarrow \frac{1}{2} [F(u - u_0) + F(u + u_0)]$$

$$f(x) \sin u_0x \Leftrightarrow \frac{1}{2i} [F(u - u_0) - F(u + u_0)],$$

т.е. умножение исходной функции на  $\exp(\pm ju_0x)$  приводит к сдвигу Фурье-образа.

**4. Свойство интерференции.** Если имеются две одинаковые функции смещенные друг относительно друга на величину  $2a$ , то

$$f(x+a) + f(x-a) \Leftrightarrow F(u) (e^{jua} + e^{-jua}) = 2F(u) \cos ua.$$

$$F(u) \cos ua = 0 \quad \text{для} \quad ua = (n + 1/2)\pi.$$

Следовательно, расстояние между последовательными нулевыми значениями функции равно  $\pi/a$ . Измеряя это расстояние можно определить постоянную  $a$ .

**5. Свойства симметрии.** Это свойство определяет четность преобразования Фурье и его удобно представить в виде таблицы 1.

Таблица 2.1

Функция $f(x)$	Функция $F(u)$	Функция $[F(u)]^2$
Вещественная и четная	Вещественная и четная	Вещественная и четная
Вещественная и нечетная	Мнимая и нечетная	Вещественная и четная
Мнимая и четная	Мнимая и четная	Вещественная и четная
Мнимая и нечетная	Вещественная и нечетная	Вещественная и четная
Комплексная и четная	Комплексная и четная	Вещественная и четная
Комплексная и нечетная	Комплексная и нечетная	Вещественная и четная

**6. Свойство спектров, взаимно дополнительных экранов.** Рассмотрим свойство преобразования Фурье, присущее функциям, попарно дополняющим друг друга, т.е. таким у которых прозрачные части одного в точности совпадают с непрозрачными частями другого.

Для таких функций  $f(x) + f_{\text{доп}}(x) = 1.$

Пропускание объекта  $f_{\text{доп}}(x) = 1 - f(x).$

Его Фурье-спектр  $F_{\text{доп}}(u) = \delta(u) - F(u).$

Таким образом, спектры, дополняющих друг друга бинарных объектов отличаются аддитивным членом, сконцентрированным на оптической оси (в начале координат).

## 2.4. Двумерные функции

Основные свойства двумерного преобразования Фурье можно получить из определения (см. 1.1.).

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j(ux_0 + vy_0)].$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right).$$

В общем виде

$$f(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \Leftrightarrow \frac{1}{|a_1b_2 - a_2b_1|} F(A_1u + A_2v, B_1u + B_2v),$$

где

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Это можно показать, если в преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \exp[-j(ux + vy)] dx dy$$

ввести новые переменные, определяемые как

$$a_1x + b_1y = \xi, \quad a_2x + b_2y = \eta.$$

Пусть

$$f_1(x) \Leftrightarrow F_1(u), \quad f_2(y) \Leftrightarrow F_2(v).$$

Тогда из определения двумерного преобразования Фурье (см. 1.1) имеем

$$f_1(x)f_2(y) \Leftrightarrow F_1(u)F_2(v).$$

Если ввести полярные координаты

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad u = \omega \cos \varphi, \quad v = \omega \sin \varphi$$

и, таким образом, можно получить новую пару преобразований

$$f_0(ar, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} F_0\left(\frac{\omega}{a}, \varphi + \theta_0\right),$$

т.е. поворот функции  $f(x, y)$  на угол  $\theta_0$  ведет к повороту преобразований Фурье  $F(u, v)$  на тот же угол.

Особый интерес представляет преобразование Фурье функций с разделяющимися переменными. Т.е. это такие функции, которые можно записать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной.

$$f(x, y) = f(x)f(y),$$

а в полярных координатах

$$f(r, \varphi) = f(r)f(\varphi).$$

Фурье преобразование функции с разделяющимися переменными можно представить в виде произведения одномерных Фурье-преобразований

$$f(x, y) = f(x)f(y) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi ux) dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-j2\pi vy) dy = F(u)F(v).$$

Особо можно выделить и двумерное преобразование Фурье функций, обладающих осевой симметрией. Функция обладает круговой симметрией если

$$f(x, y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Функцию с круговой симметрией в цилиндрических координатах можно записать как функцию только радиуса

$$f(r, \varphi) = f(r).$$

Для этого случая преобразование Фурье имеет вид

$$F(u, v) = \int_0^{\infty} r f(r) dr \int_0^{2\pi} \exp[-j\omega r \cos(\theta - \varphi)] d\theta = \\ 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(\omega r) dr = F(\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Фурье-преобразование функции, имеющей осевую симметрию, само обладает осевой симметрией и может быть найдено путем выполнения одномерного действия. Этот вид преобразования встречается очень часто, особенно в оптике, и имеет свое название - преобразование Фурье-Бесселя или преобразование Ханкеля нулевого порядка.

## 2.5. Наиболее часто встречающиеся в оптике специальные функции в связи с применением теории систем и преобразований

Прямоугольная функция

$$rect(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a/2, \\ 0, & |x| > a/2 \end{cases}$$

sinc – функция или ядро Фурье

$$sinc(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

круговая функция

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases}$$

Фурье-образом  $\text{rect}(x)$  является  $\text{sinc}(xa)$ , а Фурье-образом  $\text{circ}(r)$

$$\pi r_0^2 \text{somb}(2Rr_0) = r_0 J_1(2\pi Rr_0) / R,$$

где  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка. Функция

$$\text{somb}(x) = 2J_1(\pi x) / \pi x \equiv \Lambda(\pi x)$$

широко используется в оптике в связи с дифракцией света на круглом отверстии. Она получила специальное название – сомбреро, что соответствует характерному виду описываемой ее в пространстве поверхности.

## 2.6. Свойства симметрии дифракционной картины

Свойство симметрии одно из фундаментальных свойств дифракционных спектров. Оно играет большую роль во всех задачах дифракции. Использование свойств симметрии позволяет сократить время обработки, упростить анализ ДК, определить ориентацию объекта дифракции.

В простых плоских фигурах возможны следующие элементы симметрии: ось симметрии, плоскости симметрии и центр симметрии. Если допустить, что плоская фигура, является только частью бесконечно продолжающегося рисунка, то появляется трансляционная симметрия. Данному виду симметрии соответствует особая плоскость.

При описании симметрии дифракционного поля обычно используются такие элементы, как плоскость симметрии и ось симметрии. Наличие же трансляционной симметрии в дифракционных спектрах практически не отмечается. Это обусловлено тем, что в явном виде она проявляется только в сетке минимумов ДК таких объектов, как щель, прямоугольное отверстие и его аффинные преобразования, а также, например, в ДК такого объекта, как совокупность круглых одинаковых отверстий (экранов), расположенных в вершинах правильных многоугольников.

Фигура называется симметричной, если она состоит из равных, закономерно повторяющихся частей. Во всякой симметричной фигуре является обязательным, во-первых, наличие равных частей, во-вторых, их определенная закономерная повторяемость. Закономерность в повторении равных частей симметричной фигуры может быть обнаружена с помощью некоторых вспомогательных геометрических образов. При анализе симметрии фигуры обычно используются такие вспомогательные геометрические образы как плоскость, прямая и точка. Они называются элементами симметрии фигуры. В симметричных фигурах возможны следующие элементы симметрии: центр симметрии, плоскости симметрии, ось симметрии.

*Плоскость симметрии* - такая плоскость в симметричной фигуре, при отражении в которой, как в двухстороннем зеркале, фигура совмещается сама с

собой. Плоскость симметрии делит фигуру на две зеркально равные части и обозначается буквой  $P$ .

*Центр симметрии* - особая точка внутри фигуры, характеризующаяся тем, что по обе стороны от любой проведенной через нее прямой и на равных расстояниях от этой прямой находятся одинаковые (соответственные) точки фигуры. Центр симметрии обозначается буквой  $C$ .

*Ось симметрии* - прямая, принадлежащая данной фигуре, при повороте вокруг которой на некоторый определенный угол фигура совмещается сама с собой. Ось симметрии обозначается буквой  $L$ .

При записи формулы симметрии, представляющей собой полный перечень элементов симметрии той или иной фигуры, она записывается в следующей последовательности: ось симметрии, плоскость симметрии, центр симметрии. Например,  $L_3 2PC$  - ось симметрии 3-го порядка, две плоскости симметрии, центр симметрии.

Двумерное преобразование Фурье, соответствующее дифракции Фраунгофера на плоских экранах, обнаруживает ряд довольно интересных свойств симметрии, на которые впервые указал R. Straubel. Распределение амплитуды поля при дифракции на отверстии  $S$  в плоском экране при нормальном падении излучения единичной интенсивности

$$g(u, \varphi) = \frac{\sqrt{I_0}}{D_S} \iint_S \exp[-iku\rho \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\theta. \quad (1.2)$$

В соответствии со свойством комплексно-сопряженных чисел их мнимые части отличаются только знаком, следовательно,

$$g(u, \varphi) = g^*(u, \varphi \pm \pi).$$

Распределение интенсивности в дифракционной картине, наблюдаемое на практике, пропорционально квадрату амплитуды поля

$$I(u, \varphi) = g(u, \varphi) g^*(u, \varphi).$$

Для того чтобы ДК, описываемая этим выражением обладала центром симметрии, необходимо

$$I(u, \varphi) = I(u, \varphi \pm \pi).$$

Действительно, из уравнения (1.2), видно, что это условие всегда имеет место независимо от формы отверстия в экране. Таким образом, распределение интенсивности вдоль линии, проходящей через центр симметрии, будет одинаковым по обе стороны от центра, и будет зависеть только от расстояния до центра симметрии. Кроме того, отсюда следует, что центр симметрии ДК имеет координаты  $(0,0)$ .

Наличие дополнительной симметрии в форме отверстия приводит к появлению соответствующей дополнительной симметрии и в картинах дифракции Фраунгофера. То есть симметрия отверстия оказывает влияние на симметрию дифракционной задачи (См. Таблица 2).



Кроме того, само отверстие  $S$  может иметь элементы симметрии: плоскость симметрии, центр симметрии или ось симметрии. Геометрическая фигура может обладать или одним элементом симметрии или одновременно иметь несколько элементов симметрии. В этом случае симметрия отверстия приводит к дополнительной симметрии картины дифракции. Причем, если отверстие  $S$  имеет ось симметрии порядка  $L_n$  и  $n$  четное, тогда

$$g(r, \theta) = g\left(r, \theta + \frac{2\pi}{n} K\right),$$

где  $K=0, 1, 2, \dots$

Если  $n$  - нечетное

$$g\left[r, \theta + \frac{2\pi}{n} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right] = g^*(r, \theta)$$

и распределение интенсивности имеет ось симметрии порядка  $L_{2n}$ . Т.е. порядок оси симметрии удваивается.

R. Straubel также сформулировал важное правило относительно нулевых точек интенсивности в картинах Фраунгофера: если отверстие  $S$  имеет нечетно-кратную точку симметрии, дифракционная картина отображает только изолированные точки нулевой интенсивности. Они располагаются на пересечении двух систем линий

$$\operatorname{Re}[g(r, \theta)] = 0, \quad \operatorname{Im}[g(r, \theta)] = 0 \quad n - \text{нечетное}.$$

Если отверстие имеет четно-кратную точку симметрии, точки нулевой интенсивности располагаются только на замкнутых кривых и образуют систему линий

$$\operatorname{Re}[g(r, \theta)] = g(r, \theta) = 0 \quad n - \text{четное}.$$

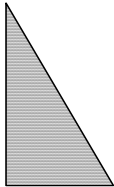



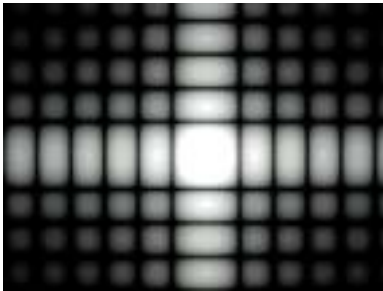
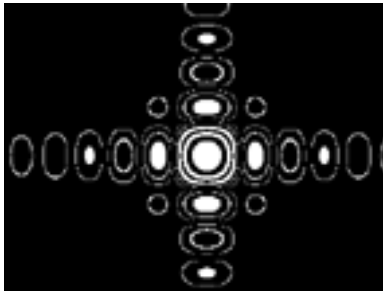
Из свойств симметрии, приведенных выше для функции  $g(r, \theta)$ , следует, что достаточно рассчитать  $g(r, \theta)$  в определенной области углов и, используя эти свойства, найти величины во всей плоскости наблюдения.


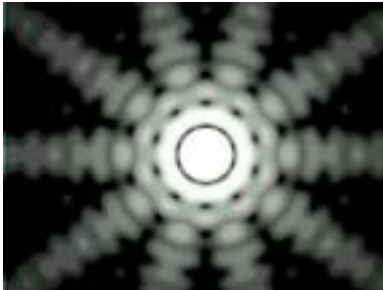

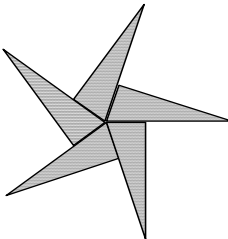





#### **Примечание**

Обычно симметрию ДК связывают с симметрией границы препятствия. Однако симметрия света обладает особой внутренней симметрией. При дифракции света вблизи прямого края полуплоскости луч света разделяется на два луча, один из которых идет в область геометрической тени, а другой – в область прямого света. При этом углы дифракции этих лучей равны по модулю, а энергия луча делится на две равные части. При нормальном падении световой волны оба дифрагированных луча и луч падающий лежат в одной плоскости, перпендикулярной границе полуплоскости. Внутренняя симметрия дифракции легко демонстрируется в опыте с лазерным лучом: достаточно ввести в луч лазера лезвие бритвы и можно наблюдать на экране ДК в виде симметричной дорожки с монотонным убыванием интенсивности по мере удаления от центральной точки без каких либо признаков интерференции. [Э.С. Попов. Лучевая теория дифракции света.]

Таблица 2.2

**Симметрия дифракционной картины**

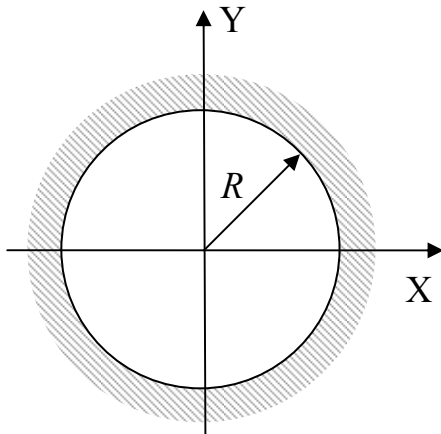
Апертура		Дифракционная картина		
Форма	Симметрия	Фотография	Структура	Симметрия
	Ось симметрии $L_1$			Ось симметрии-2 Центр симметрии $L_2C$
	Ось симметрии-4 Плоскость симметрии-4 Центр симметрии $L_44PC$			Ось симметрии-4 Плоскость симметрии-4 Центр симметрии $L_44PC$

	<p>Ось симметрии-5 Плоскость симметрии-5</p> <p><math>L_5P</math></p>			<p>Ось симметрии-10 Плоскость симметрии-10</p> <p><b>Центр симметрии</b></p> <p><math>L_{10}10PC</math></p>
	<p>Ось симметрии-5</p> <p><math>L_5</math></p>			<p>Ось симметрии-10</p> <p><b>Центр симметрии</b></p> <p><math>L_{10}C</math></p>
	<p>Плоскость симметрии-1</p> <p><math>L_1P</math></p>			<p>Ось симметрии-2 Плоскость симметрии-2</p> <p><b>Центр симметрии</b></p> <p><math>L_22PC</math></p>



## 2.7. Фурье-образы наиболее часто встречающихся в оптике двумерных сигналов и их свойства

1. Форма сигнала – круг радиусом  $R$ , распределение амплитуды равномерное



Физический аналог – дифракция Фраунгофера плоской волны на круглом отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка,  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение сигнала по осям X и Y соответственно.

$J_1$  является действительной и четной функцией, поэтому при отсутствии смещения ( $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0$ ) Фурье-образ также действительный и четный. При наличии смещения в Фурье-образе возникают дополнительные осцилляции, частота которых пропорциональна смещению. Действительная часть остается четной, мнимая часть является нечетной. Смещение является чисто фазовой добавкой, и модуль Фурье-образа не изменяется, так что вид дифракционной картины, пропорциональный его квадрату, сохраняется (рис. 2.2).

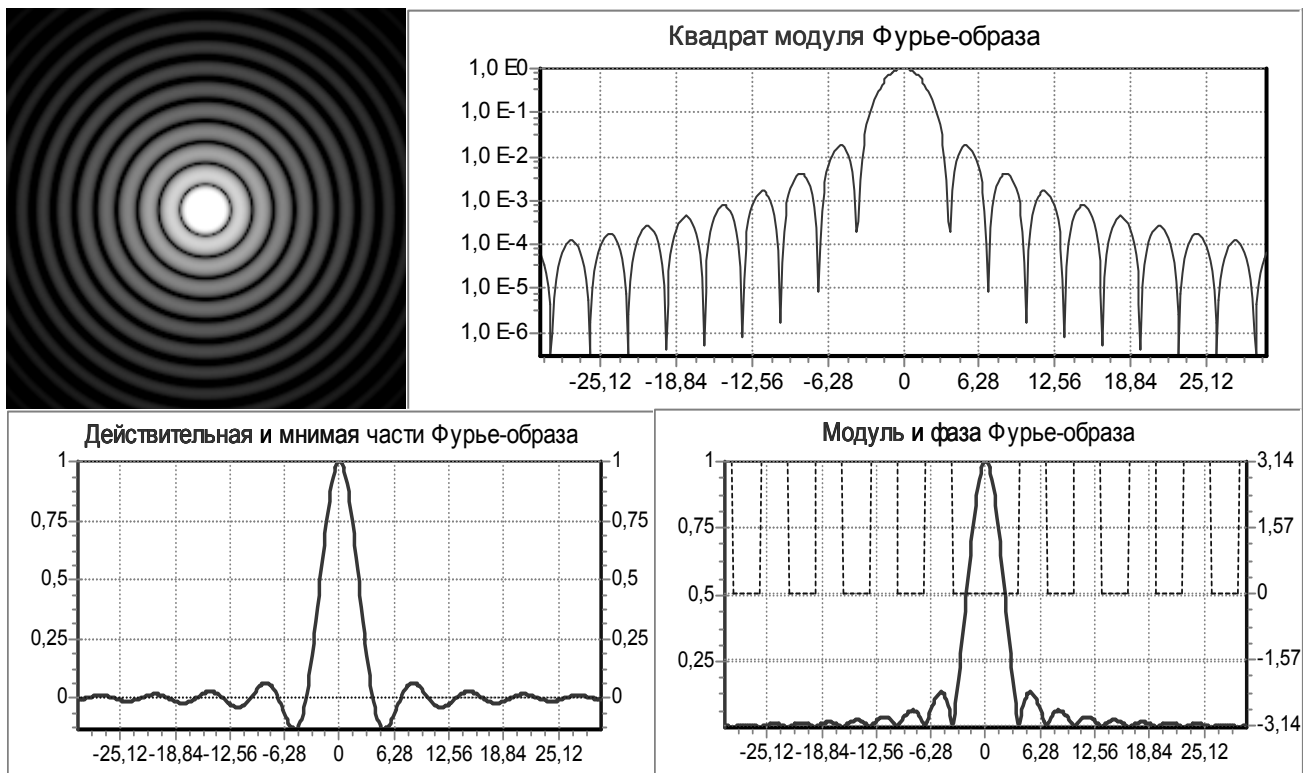
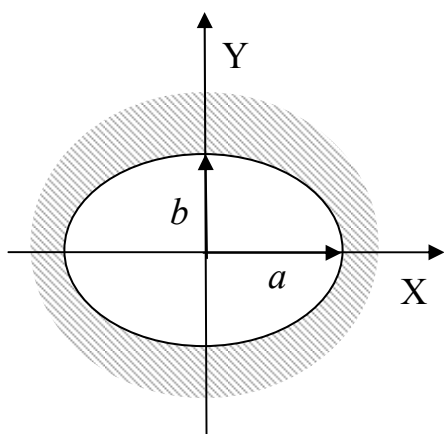


Рис. 2.2. Фурье-образ круглого сигнала ( $R=1$ )

## 2. Форма сигнала – эллипс с полуосями $a$ и $b$ , амплитуда постоянная



Физический аналог – дифракция Фраунгофера плоской волны на эллиптическом отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

где  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\rho = R\sqrt{(u/a)^2 + (v/b)^2}$ ;

$J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка;  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение сигнала по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

При отсутствии смещения Фурье-образ также действительный и четный. Эллиптичность приводит к “деформации” Фурье-образа. Он разворачивается на  $90^\circ$  относительно ориентации исходного эллипса (рис. 2.3).

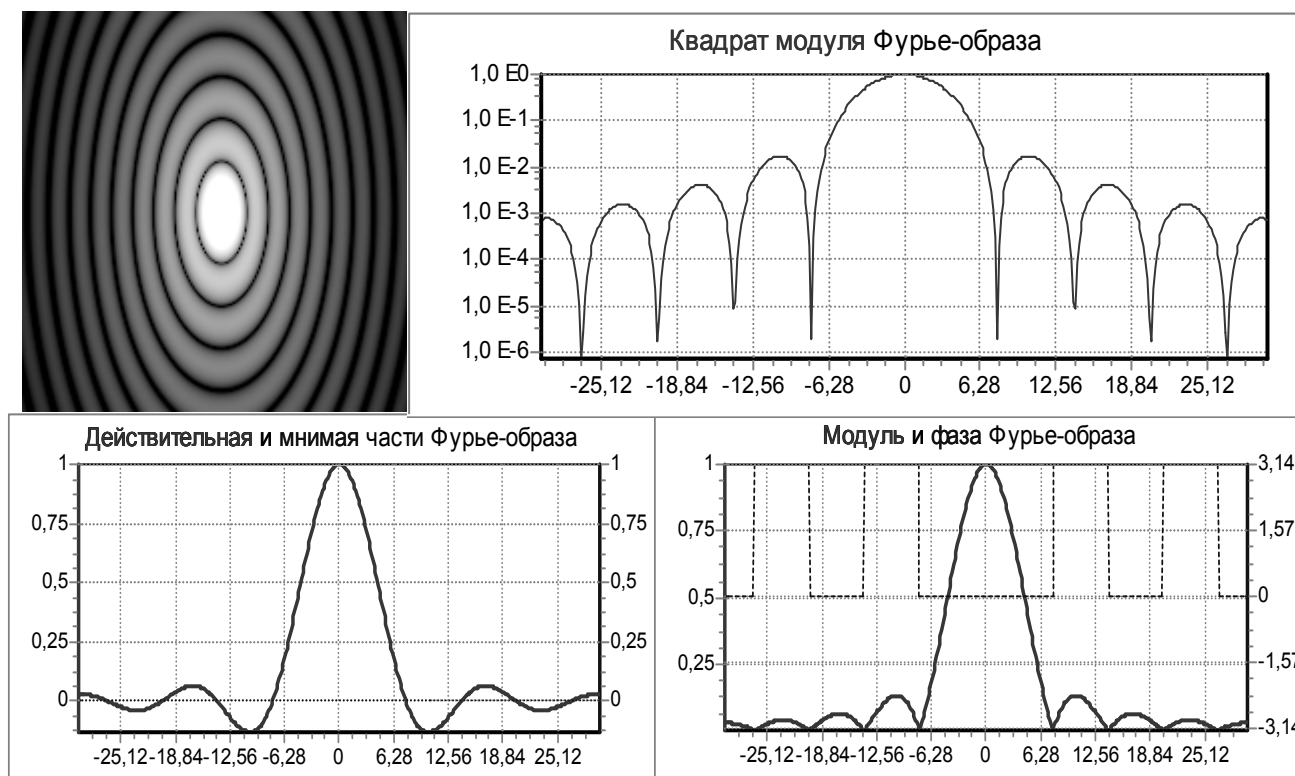


Рис. 2.3 . Фурье-образ эллиптического сигнала (угол сечения  $90^\circ$ )

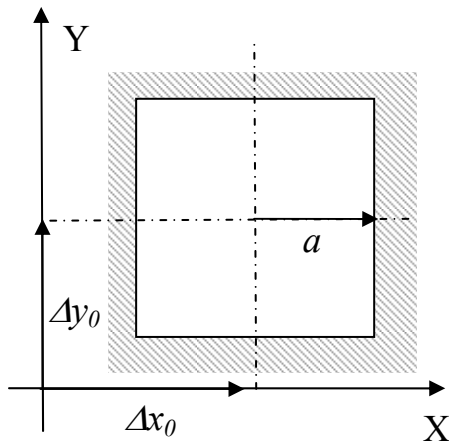
### 3. Форма сигнала - квадрат, распределение амплитуды равномерное

Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на квадратном отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{\sin(au)}{u} \cdot \frac{\sin(av)}{v} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

где  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение сигнала по осям  $x$  и  $y$  соответственно,  $a$  - половина длины стороны квадрата (или полуширина).



Функция  $\sin(x)/x$  является действительной и четной, поэтому при отсутствии смещения ( $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0$ ) Фурье-образ также действительный и четный. При наличии смещения в Фурье-образе возникают дополнительные осцилляции, частота которых пропорциональна смещению.

Действительная часть остается четной, мнимая часть является нечетной. Смещение является чисто фазовой добавкой, и модуль Фурье-образа не изменяется, так что вид дифракционной картины, пропорциональный его квадрату, сохраняется (рис. 2.4)

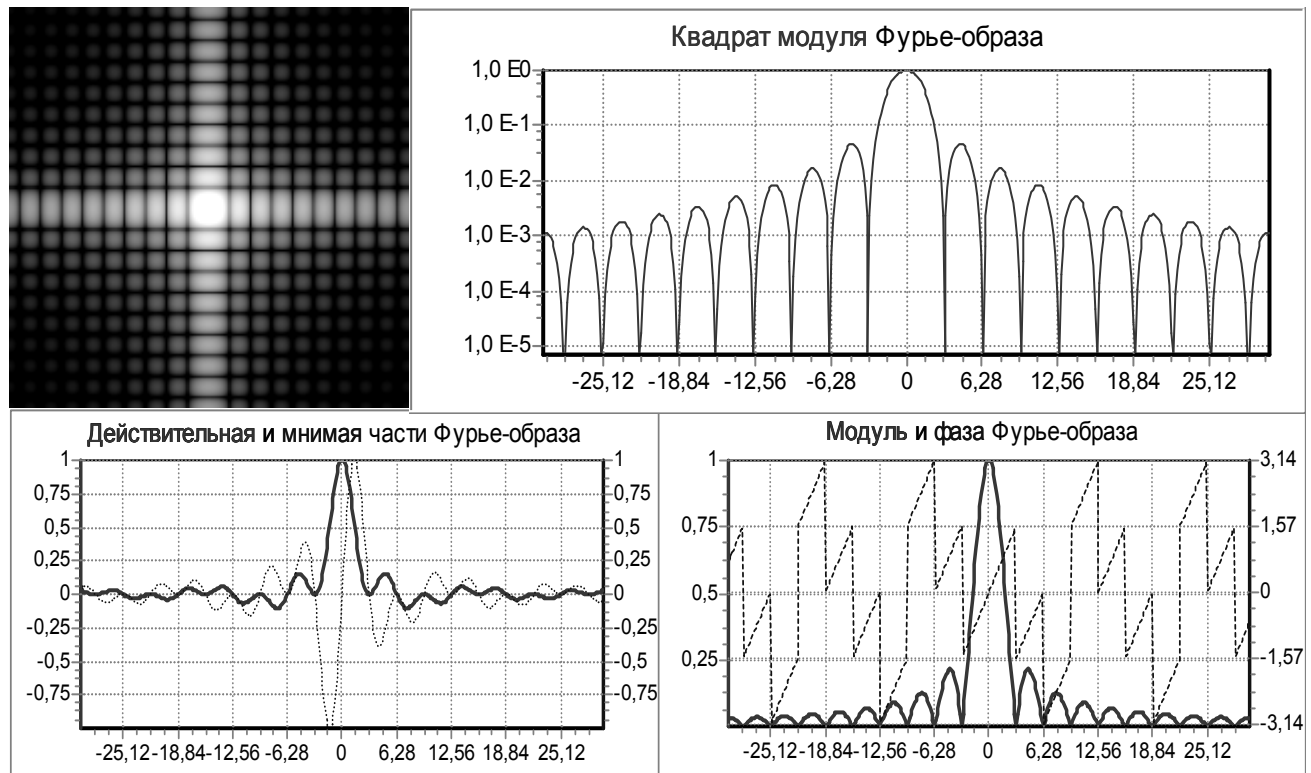
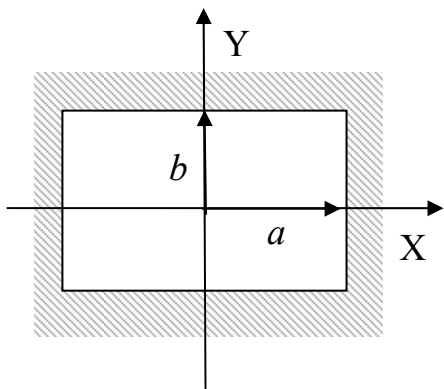


Рис. 2.4. Фурье-образ смещенного квадратного сигнала ( $a=1$ , угол сечения  $90^\circ$ )

#### 4. Форма сигнала – прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$

Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на прямоугольном отверстии.



Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{\sin(au)}{u} \cdot \frac{\sin(bv)}{v} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0)$$

Функция  $\sin(x)/x$  является действительной и четной, поэтому при отсутствии смещения Фурье-образ также действительный и четный.

Неравенство сторон приводит к деформации Фурье-образа - развороту на  $90^\circ$  относительно деформации исходного прямоугольника (рис. 2.5).

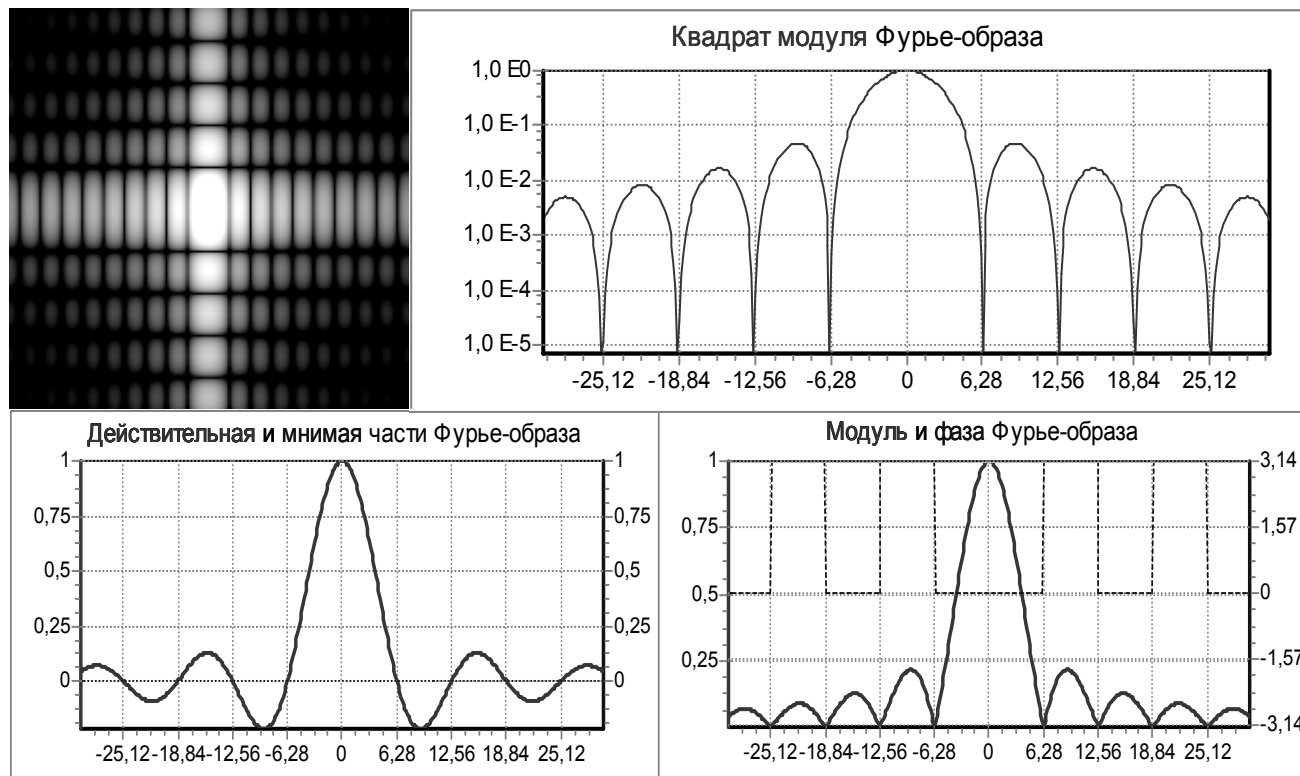
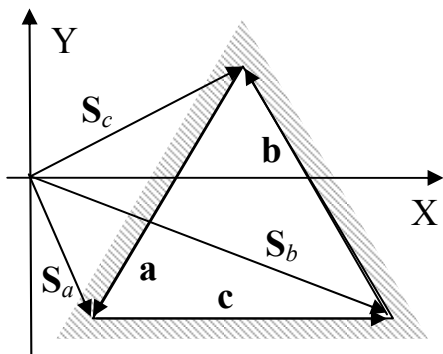


Рис. 2.5. Фурье-образ прямоугольного сигнала (угол сечения  $90^\circ$ )



5. Форма сигнала - треугольник, распределение амплитуды равномерное



Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на треугольном отверстии.

Фурье-образ треугольного сигнала в общем виде удобно записать в векторной форме:

$$F(\mathbf{q}) = \frac{\exp(j\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_a)}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c})} + \frac{\exp(j\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_b)}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c})} + \frac{\exp(j\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_c)}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})},$$

где векторы  $\mathbf{q}=(u,v)$ ;  $\mathbf{s}_a, \mathbf{s}_b, \mathbf{s}_c$  - радиус-векторы вершин треугольника;  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  - векторы сторон

треугольника:  $\mathbf{a} = \mathbf{s}_c - \mathbf{s}_a$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{s}_c - \mathbf{s}_b$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a$ .

Фурье-образ треугольного сигнала всегда является комплексным, и его поведение является достаточно сложным. Понять его особенности помогает физическая аналогия - три слагаемых Фурье-образа имеют вид плоских волн, распространяющихся в плоскости X,Y в направлении нормалей к сторонам треугольника, и, соответственно, полный Фурье-образ является результатом интерференции трех таких волн. Сигнал обладает осью симметрии порядка  $n = 3$ , и, в соответствии со свойством симметрии, квадрат Фурье-образа имеет ось симметрии порядка  $n = 6$  (рис. 2.6).

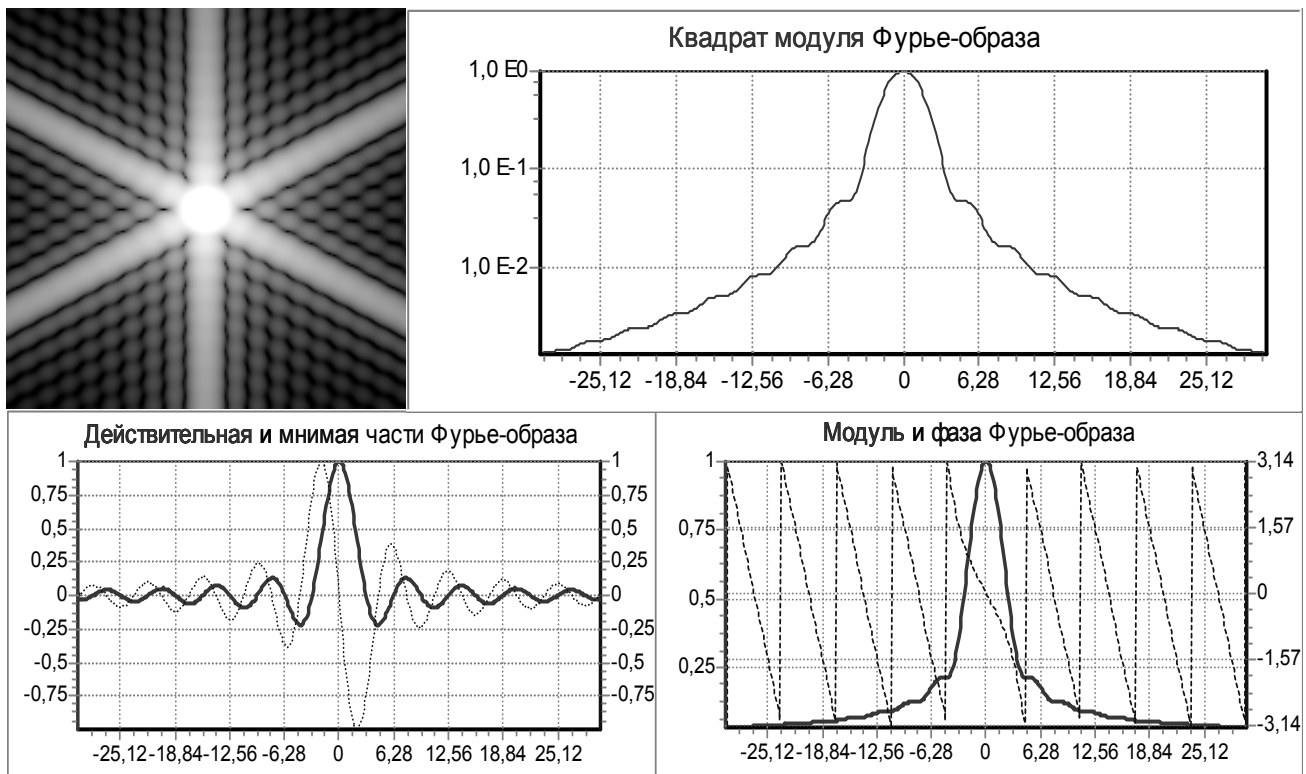


Рис. 2.6. Фурье-образ треугольного сигнала (угол сечения  $90^\circ$ )

В результате нарушения равенства сторон треугольника нарушается и симметрия Фурье-образа, изменяется угол ориентации и яркость «лучей». Яркость лучей пропорциональна длине соответствующих им сторон треугольника.

6. Форма сигнала - два одинаковых круга, распределение амплитуды равномерное

Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на паре круглых отверстий (опыт Юнга).

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot [\exp(ju\Delta x_1 + jv\Delta y_1) + \exp(ju\Delta x_2 + jv\Delta y_2)]$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $J_1$  - функция Бесселя первого рода первого порядка,  $x_1$ ,  $y_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$  - координаты центров кругов.

Вид квадрата Фурье-образа - кольца, соответствующие кругу радиуса  $R$ , промодулированные эквидистантными полосами, перпендикулярными линии, соединяющей центры кругов. Расстояние между полосами обратно пропорционально расстоянию между кругами (рис. 2.7).

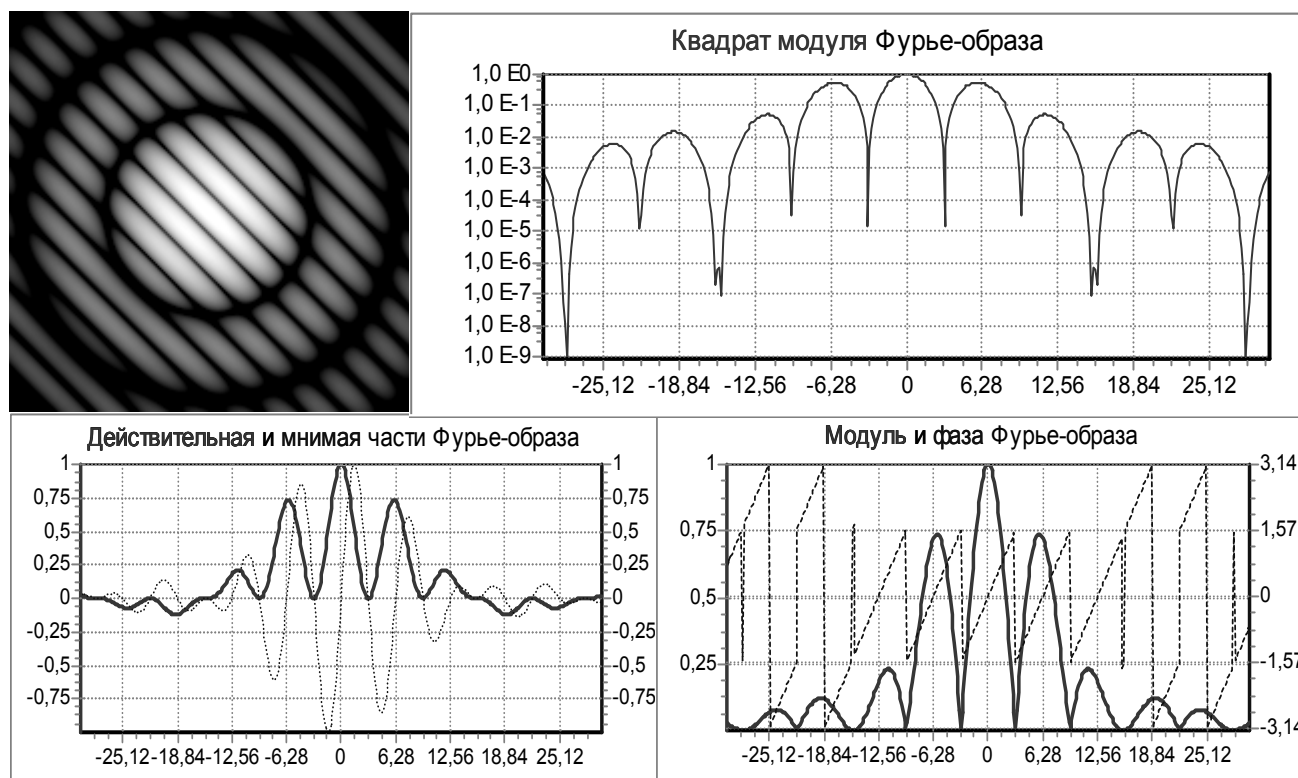
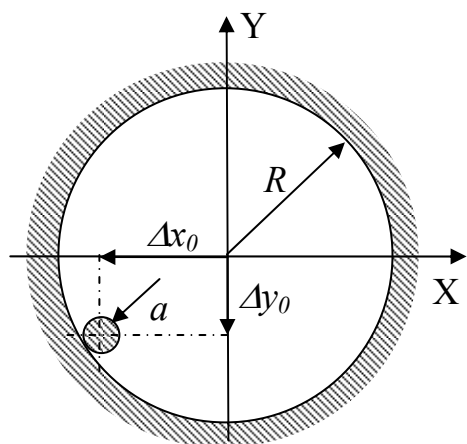


Рис. 2.7. Фурье-образ сигнала в виде пары одинаковых кругов (угол сечения  $0^\circ$ )

7. Форма сигнала - два круга большого и малого диаметров; амплитуды сигналов имеют разные знаки



Физический аналог - дифракция Фраунгофера на круглом отверстии в присутствии малого непрозрачного экрана.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} - \frac{a}{R} \cdot \frac{J_1(a\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0)$$

, где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $J_1$  - функция Бесселя первого рода первого порядка,  $R$  и  $a$  - радиусы большого и малого кругов,  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  - смещение малого круга по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

Вид Фурье-образа - кольца, соответствующие кругу радиуса  $R$ , промодулированные линиями второго порядка, соответствующими кругу радиуса  $a$ . Глубина данной модуляции определяется отношением радиусов кругов, а характер определяется смещением малого круга - эксцентриситет линий равен отношению смещения к радиусу большого круга, а наклон оси линий соответствует ориентации линии, соединяющей центры кругов.

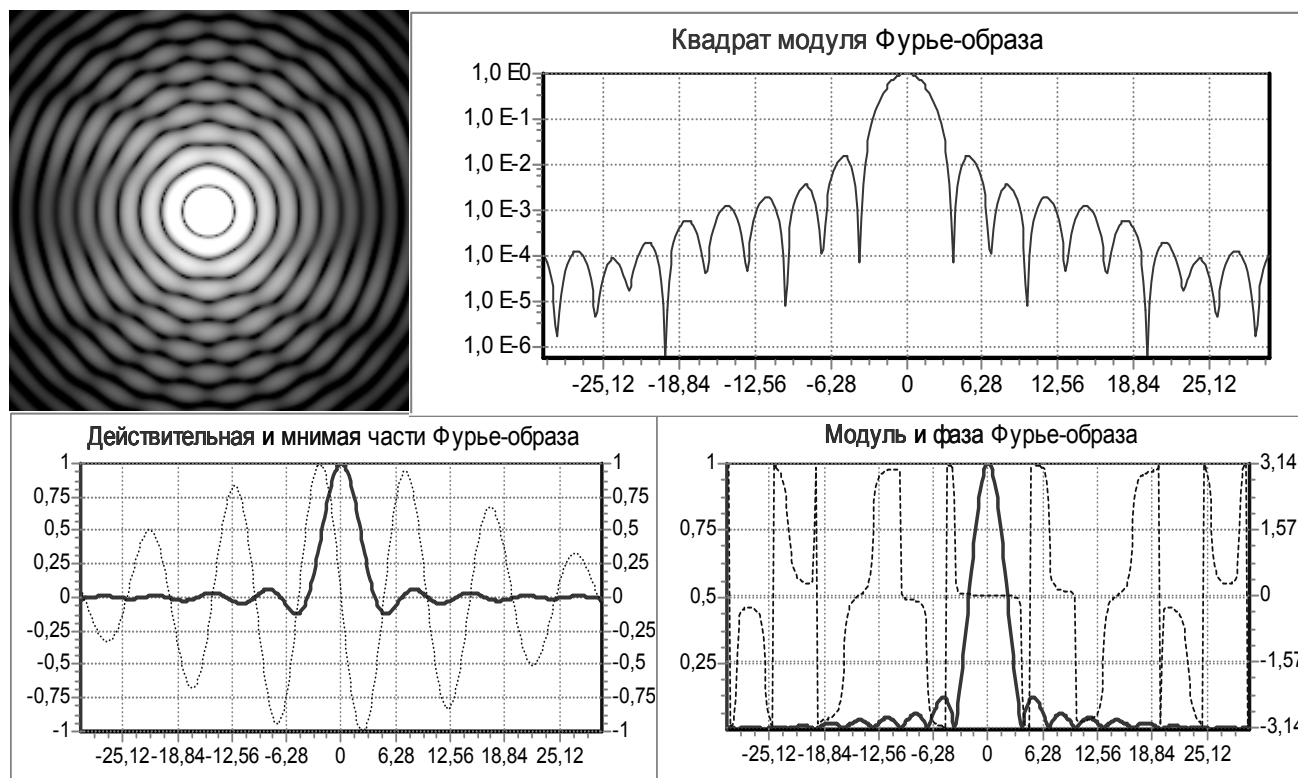
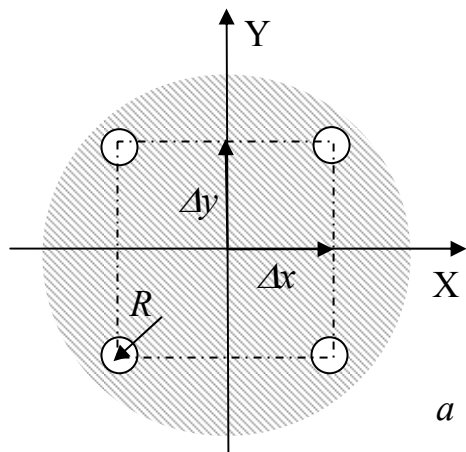


Рис. 2.8. Фурье-образ сигнала в виде пары кругов разного размера и знака (угол сечения  $45^\circ$ )

Таким образом, если малый круг находится в центре - эксцентриситет линий модуляции равен нулю - они являются окружностями,

накладывающимися на кольца большого круга. При ненулевом смещении линии модуляции превращаются в эллипсы, пересекающие кольца (эксцентриситет в пределах от 0 до 1). Когда центр малого круга достигает края большого, эксцентриситет равен 1 - линии становятся параболами. При дальнейшем смещении эксцентриситет  $> 1$  и линии – гиперболы (рис. 2.8).

### 8. Форма сигнала – набор $N$ малых кругов (на примере $N=4$ )



Физический аналог – дифракция на системе точечных отверстий или интерференция излучения системы точечных когерентных источников.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

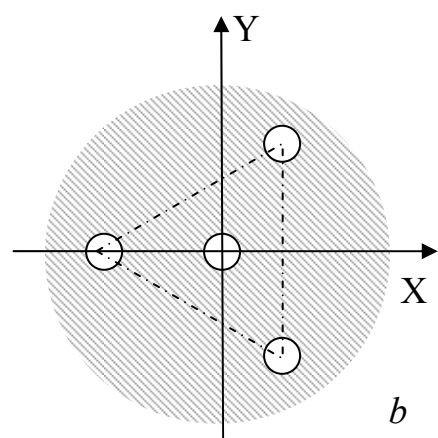
$$F(u, v) = \sum_{n=1}^N \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_n + jv\Delta y_n),$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$  ;

$J_1$  – функция Бесселя первого рода первого

порядка;

$\Delta x_n$  и  $\Delta y_n$  – смещение  $n$ -го круга по осям  $X$  и  $Y$  соответственно.



Данный пример демонстрирует свойства симметрии преобразования Фурье. В исходном состоянии круги расположены в углах квадрата. Такой сигнал имеет ось симметрии четвертого порядка и столько же плоскостей зеркального отражения - такая группа симметрии обозначается  $4m$ . В соответствии со сказанным выше, такая же симметрия будет и у Фурье-образа.

При произвольном смещении одного из кругов сигнал становится асимметричным, но у его образа будет группа симметрии равная 2. Если сместить два круга так, чтобы они образовали прямоугольник, у сигнала и образа вновь будет равная симметрия -  $2m$ . Максимальная степень симметрии в данном примере ( $3m$  для сигнала и  $6m$  для образа) наблюдается в том случае, когда три кружка расположены в вершинах правильного треугольника, а четвертый находится в его центре.

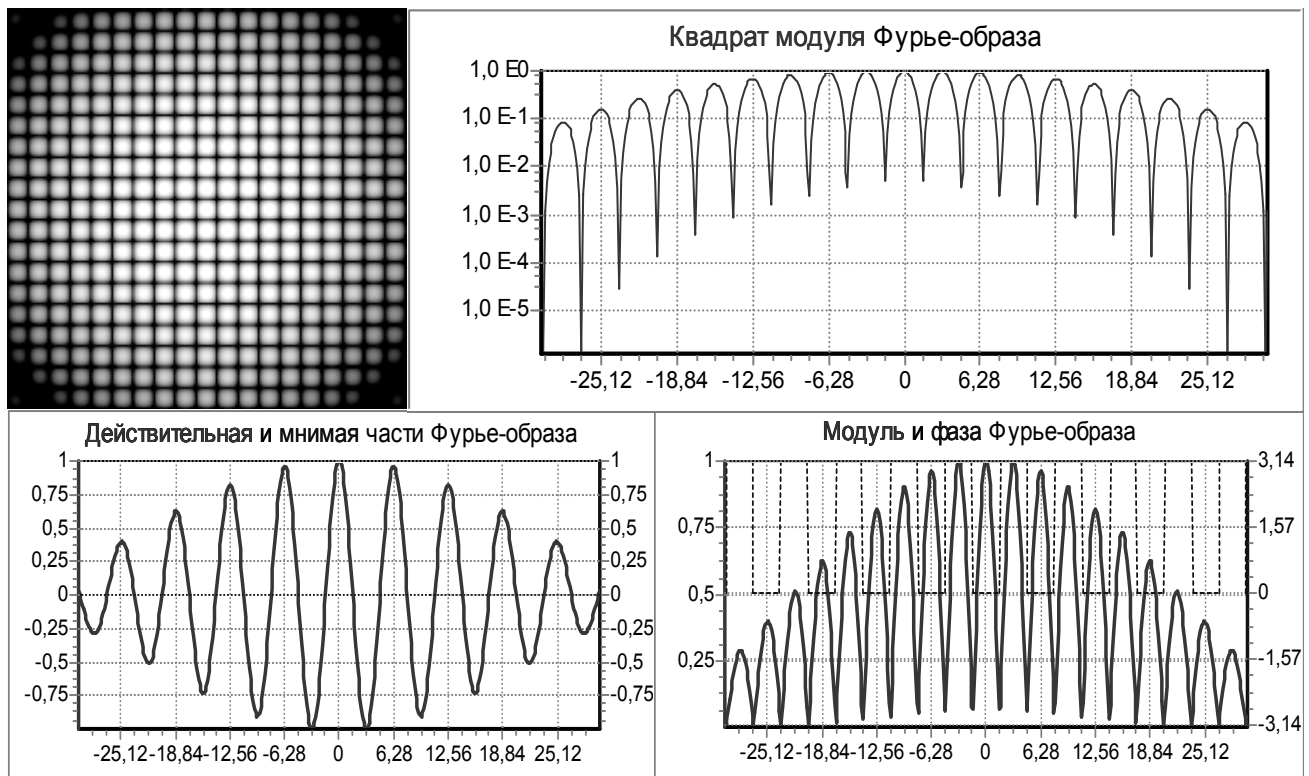


Рис. 2.9. Фурье-образ сигнала в виде четверки малых кругов, размещенных в вершинах квадрата (угол сечения  $90^\circ$ )

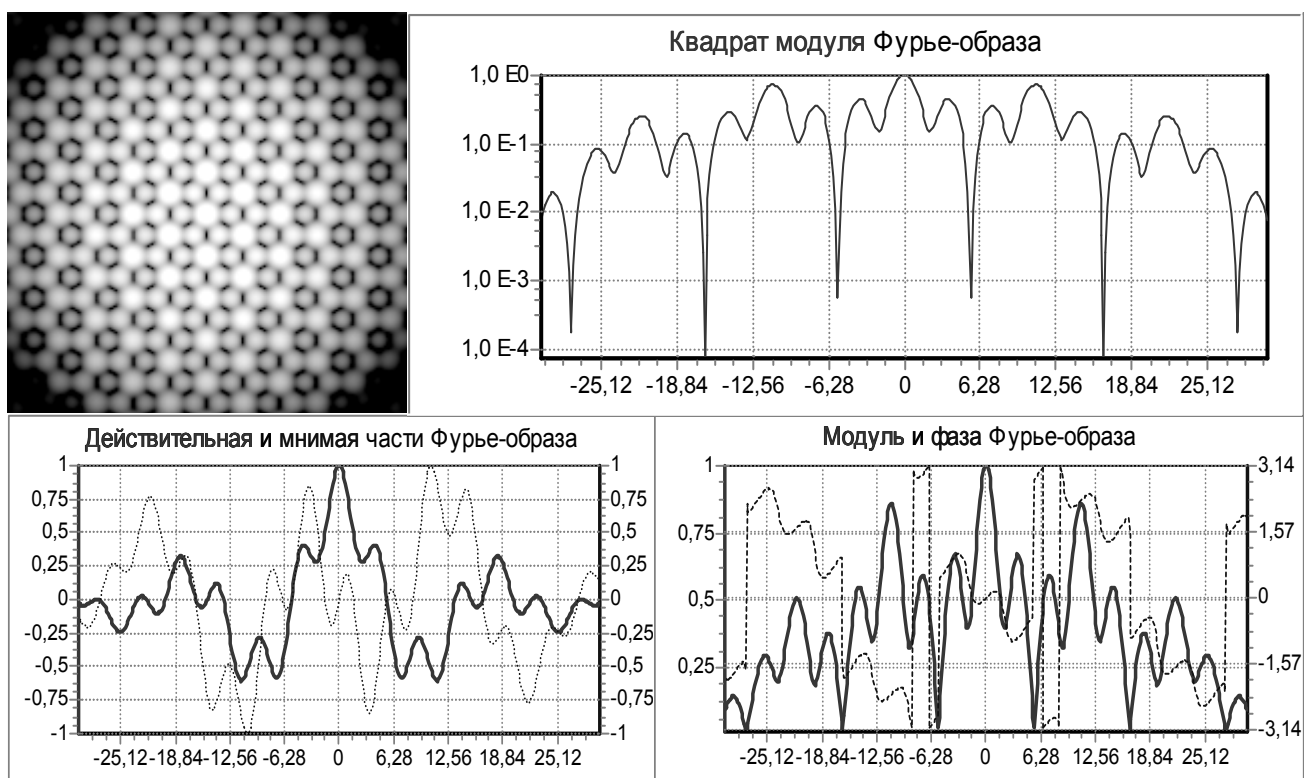


Рис. 2.10. Фурье-образ сигнала в виде четверки малых кругов, размещенных в вершинах и центре правильного треугольника (угол сечения  $60^\circ$ )

## 2.8. Трансляционная симметрия дифракционной картины

При дифракции на щели, дифракционное распределение интенсивности, соответствующее в математике квадрату Фурье-преобразования от прямоугольного импульса, с точностью до постоянного множителя описывается выражением

$$I(X) = \sin^2 x / x^2.$$

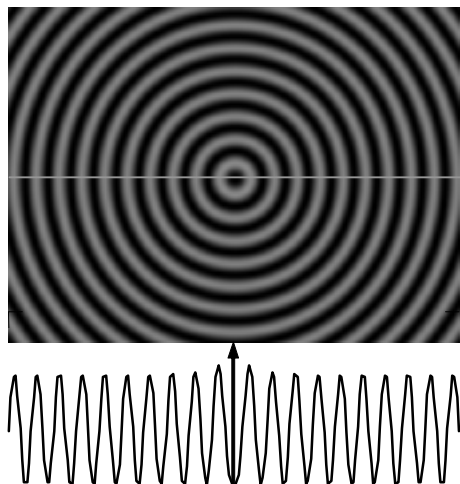


Рис.2.11. Трансляционная симметрия подобия, получаемая при выравнении ДК круглого отверстия, и сечение ДК

Щелевое отверстие имеет одну плоскость симметрии. Распределение интенсивности в ДК от щелевого отверстия представляет произведение квадрата функции синуса на функцию, определяющую скорость спада интенсивности в ДК. Так как функция синуса уже является периодической, то получению трансляции спектра в ДК нам “мешает” только затухание дифракционного спектра и различие линейных размеров центрального дифракционного лепестка и боковых.

В литературе известно много моделей построения ДК, но для выявления свойств симметрии наиболее предпочтительной представляется модель геометрической теории дифракции (ГТД), позволяющая моделировать структуру ДК. Дифракционные волны, возникающие при дифракции на плоских апертурах, в соответствии с ГТД порождаются или гладкими участками контура или точками излома (угловыми точками) контура. Угловые точки контура излучают сферические волны, существующие на всей плоскости ДК, а краевые дифракционные волны, как правило, имеют ограниченную область существования. Исключением можно считать тороидальную волну, излучаемую апертурой круглой или эллиптической формы. В соответствии с ГТД линии структуры в этом случае образуются в результате интерференции двух точечных “скользящих” по окружности источников. Линии минимумов ДК апертур круглой или эллиптической формы представляют систему концентрических колец круглой или эллиптической формы (рис. 2.11). Такая система концентрических окружностей и эллипсов обладает трансляционной симметрией подобия.

Учитывая механизм построения плоской сетки сетчатого орнамента, а также области существования дифракционных волн, для наблюдения трансляционной симметрии в ДК наиболее подходит модель попарной интерференции излучения точечных источников. В случае круглого отверстия таких источников всего два. В силу осевой симметрии бесконечного порядка они образуют систему концентрических окружностей. Для многоугольного контура число таких источников уже больше двух и они являются фиксированными. Минимальное число таких источников для прямоугольной апертуры – четыре. Распределение интенсивности в интерференционной картине двух

фиксированных точечных источников представляет систему эквидистантных полос. Пересечение систем полос должно образовать сетчатый орнамент.

Трансляционная симметрия дифракционной картины от совокупности прямоугольных элементов. Преобразование ДК путем ее умножения на функцию, обратную затуханию, приводит к появлению трансляционной симметрии, и мы получаем бордюр с одной осью переносов и периодом трансляции, равным  $\pi$ . В радиотехнике такому преобразованию частотного спектра соответствует операция дифференцирования исходного сигнала. Это преобразование используется и при оптической обработке информации. На практике такое преобразование можно выполнить, используя различные пространственные фильтры.



Рис. 2.12. Изолинии выровненной ДК прямоугольного отверстия.  $a/b=1/3$

Распределение интенсивности от прямоугольного отверстия со сторонами  $2a$  и  $2b$  с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$I(x, y) = \sin^2(xa) \sin^2(yb) / (xy)^2.$$

Преобразовав спектр прямоугольного отверстия аналогичным образом, т.е. умножив его на  $(xy)^2$ , получим распределение интенсивности, соответствующее плоской сетке (рис. 2.12). Элементом трансляции здесь является прямоугольный участок ДК со сторонами  $\pi/a$ ,  $\pi/b$ .

С точки зрения ГТД ДК прямоугольного отверстия формируется краевыми волнами и излучением из угловых точек и состоит из двух основных характерных областей – области интерференции краевых волн и области интерференции точечных источников, соответствующих излучению из угловых точек контура. Причем эти области сильно различаются по интенсивности. Интенсивность в области ДК, соответствующей излучению угловых точек, спадает очень быстро  $(1/x^2y^2)$ , а область краевых волн –  $(1/xy)$ .

ДК от многоугольной апертуры имеет такой же характер, как и от прямоугольной апертуры, но только в том случае, если ее можно представить в виде совокупности параллелограммных апертур.

Процесс формирования дифракционного поля многоугольной апертуры можно представить несколькими способами: как дифракционное поле, создаваемое точечными источниками, расположенными в пределах всей апертуры; как дифракционное поле, образованное суммой излучения граней; как дифракционное поле, образованное суммой излучения вершин многоугольника. При расчете ДК прямоугольной апертуры область интегрирования можно разделить на ряд прямоугольных областей, для каждой из которых осуществимо разделение переменных. Это упрощает процесс вычисления.

Выражение для дифракционного поля апертуры, составленной из  $n$  прямоугольников можно записать следующим образом:

$$U(u, v) = C \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\sin(ka_j u) \sin(kb_j v)}{k^2 a_j b_j uv} \cdot \exp[-ik(\Delta\xi_j u + \Delta\eta_j v)],$$

где  $N$  - число разбиений,  $a_j$  и  $b_j$  - полуширина и полувысота  $j$ -й области;  $\Delta\xi_j, \Delta\eta_j$  - смещение центра  $j$ -й области относительно начала координат по каждой из осей. (Оси координат ортогональны ребрам апертуры.)

Затухание амплитуды дифракционного поля в плоскости регистрации обратно пропорционально произведению  $u \cdot v$ . Его можно компенсировать, умножив исходное распределение на  $u \cdot v$ . В отсутствие затухания каждое из слагаемых суммы будет представлять собой произведение двух ортогональных гармонических функций, соответственно, и вся сумма также окажется периодической функцией. Иными словами, в распределении дифракционного поля прямоугольной апертуры возникнет трансляционная симметрия группы  $(a:b)$ . Периоды трансляции по каждой из осей координат обратно пропорциональны соответствующим минимальным размерам апертуры, а характер модуляции и группа симметрии ДП внутри элемента трансляции определяется формой контура.

Согласно ГТД - модели, структура зон ДК сравнительно проста. Цилиндрические волны ребер апертуры формируют поле в двух ортогональных направлениях вдоль осей координат. Поскольку количество, длина и расположение ребер произвольны, характер модуляции в данных зонах может быть сколь угодно сложен. Зоны влияния цилиндрических волн делят плоскость ДК на четыре сектора. Вне зоны влияния цилиндрических волн, поле определяется интерференцией сферических волн угловых точек, причем число последних всегда четное. Здесь возможно наличие только трех точечных групп симметрии ДК:  $2$ ,  $2 \cdot m$  и  $4 \cdot m$ . Первая соответствует асимметричной апертуре, две другие совпадают с симметрией апертур. Более высоких групп не может быть, так как для самосовмещения апертуры, содержащей прямые углы, необходим поворот не менее чем на  $90^\circ$ .

Что касается симметрии трансляционной, то, согласно ГТД, она возникает в зонах влияния волн угловых точек.



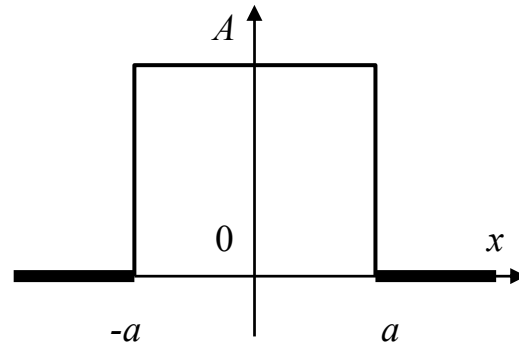
## 2.9. Примеры. Основные свойства преобразования Фурье

### Одномерный случай

Рассмотрим примеры Фурье-преобразования, ориентируясь на оптические задачи.

Задана щель шириной  $2a$ .

Рис. 2.13. Схематическое изображение щели шириной  $2a$



#### Пример. 1. Расчет Фурье-преобразования от щели, шириной $2a$

$$F(u) = A \int_{-a}^a e^{-iux} dx = A \frac{1}{-iu} e^{-iux} \Big|_{-a}^a = A \frac{1}{-iu} (e^{-iua} - e^{iua}) \frac{2a}{2a} = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua}$$

При выполнении расчета воспользовались формулой Эйлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

#### Пример. 2. Теорема масштабов

Увеличим размер щели в два раза. Ширина щели станет равной  $4a$ .

$$F(u) = A \int_{-2a}^{2a} e^{-iux} dx = A \frac{1}{-iu} e^{-iux} \Big|_{-2a}^{2a} = A \frac{1}{-iu} (e^{-i2ua} - e^{i2ua}) \frac{2 \cdot 2a}{2 \cdot 2a} = 4Aa \frac{\sin(2ua)}{2ua}$$

Увеличение ширины щели в два раза привело к двукратному увеличению амплитудного множителя и двукратному уменьшению периода функции Фурье-распределения.

#### Пример. 3. Свойство смещения (инвариантность)

Сместим щель шириной  $2a$  на расстояние  $2a$  в положительном направлении оси  $x$  (рис. 2.14). Смещение щели привело к появлению фазового множителя  $e^{-2iua}$ . Величина амплитудного множителя и период функции Фурье-распределения не изменился.

$$F(u) = A \int_a^{3a} e^{-iux} dx = A \frac{1}{-iu} e^{-iux} \Big|_a^{3a} = A \frac{1}{-iu} (e^{-i3ua} - e^{-iua}) = A \frac{1}{-iu} (e^{-iua} - e^{iua}) e^{-i2ua}$$

$$F(u) = A \int_a^{3a} e^{-iux} dx = A \frac{1}{-iu} (e^{-iua} - e^{iua}) e^{-i2ua} \frac{2a}{2a} = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} e^{-i2ua}.$$

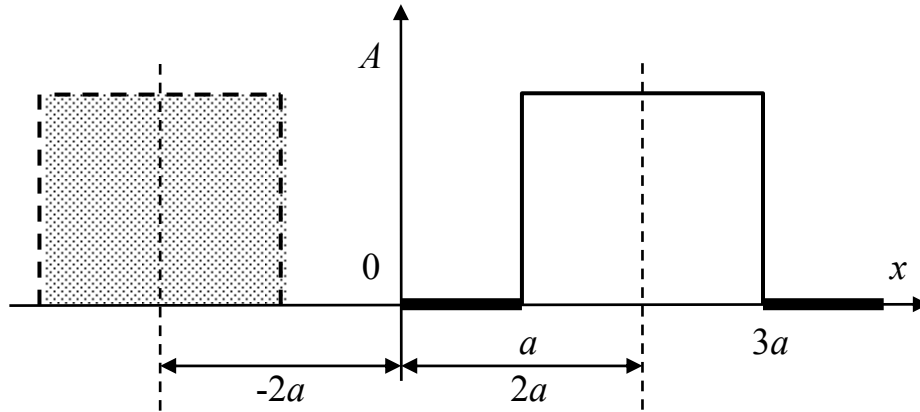


Рис. 2.14. Смещение щели

Сместим щель в другую сторону также на величину  $2a$ .

$$F(u) = A \int_{-3a}^{-a} e^{-iux} dx = A \frac{1}{-iu} (e^{-iua} - e^{iua}) e^{i2ua} \frac{2a}{2a} = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} e^{i2ua}.$$

При смещении щели в другую сторону в выражении для Фурье-преобразования изменился только знак фазового множителя. Распределение амплитуды осталось неизменным. Мы наблюдаем свойство инвариантности для распределения амплитуды Фурье-преобразования.

#### Пример. 4. Свойство интерференции

Просуммируем выражения, описывающие распределения амплитуды поля при смещении объекта

$$F_1(u) + F_2(u) = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} e^{-i2ua} + 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} e^{i2ua} = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} (e^{-i2ua} + e^{i2ua}) \frac{2}{2} \text{ и}$$

окончательно получим

$$F_1(u) + F_2(u) = 2 \cdot 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} \cos(2ua).$$

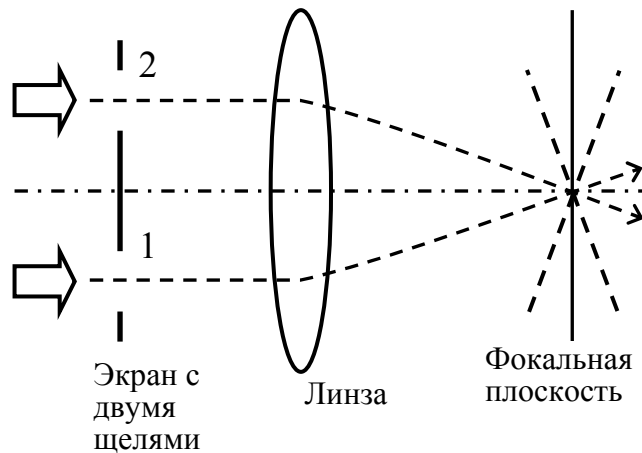


Рис. 2.15. Иллюстрация свойства Фурье-преобразования смещение и интерференция

Смещение щели из положения 1 в положение 2 приводит только к тому, что изменяется направление падения лучей в фокальной плоскости. В соответствии

с геометрической оптикой все лучи, распространяющиеся параллельно пересекаются в фокальной плоскости.

Два волновых фронта, падающих на фокальную плоскость под углом, пересекаются (накладываются) в фокальной плоскости. Ширина образующихся интерференционных полос зависит от углов падения. Результирующее дифракционное распределение оказывается промодулированным интерференционными полосами. Период модуляции определяется множителем  $\cos(2\omega a)$ .

### Пример. 5. Свойство суперпозиции

Представим щель шириной  $4a$  в виде суперпозиции двух щелей шириной  $2a$ . Щели совпадают своими границами (рис. 2.16).

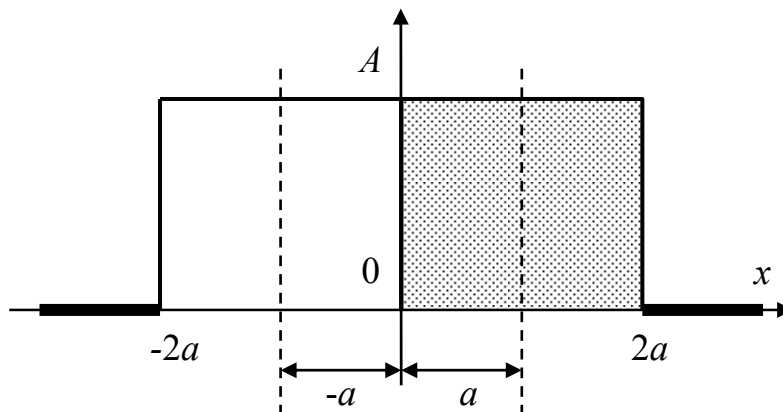


Рис. 2.16. Две щели совмещены

$$F_1(u) + F_2(u) = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} e^{-iua} + 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} e^{iua} = 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} (e^{-iua} + e^{iua}) \frac{2}{2} =$$

$$\sin(ua) \cos(ua) = \frac{1}{2} [\sin(ua - ua) + \sin(ua + ua)] = \frac{1}{2} \sin(2ua)$$

Получили выражение, совпадающее с выражением, полученным в примере 2 для теоремы масштабов.

$$F_1(u) + F_2(u) = 2 \cdot 2Aa \frac{\sin(ua)}{ua} \cos(ua) = 2Aa \frac{\sin(2ua)}{ua} \frac{2}{2} = 4Aa \frac{\sin(2ua)}{2ua}$$

### Пример. 6. Преобразования Фурье. Двумерный случай

Задано прямоугольное отверстие со сторонами  $2a \cdot 2b$ . Найдём Фурье-преобразование

$$F(u, v) = A \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-i(ux+vy)} dx dy = A \int_{-a}^a e^{-iux} dx \int_{-b}^b e^{-ivy} dy = A \cdot 2a \frac{\sin(ua)}{ua} 2b \frac{\sin(vb)}{vb}.$$

$$F(u, v) = A \int_{-a}^a \int_{-b}^b e^{-i(ux+vy)} dx dy = 4Aab \frac{\sin(ua)}{ua} \frac{\sin(vb)}{vb}$$

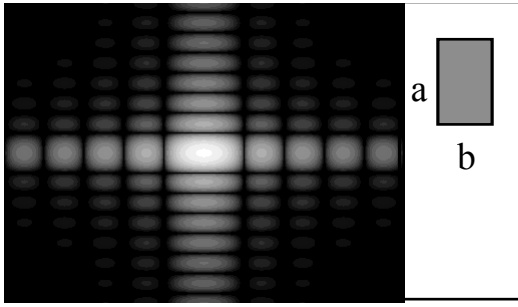


Рис. 2.17. Фурье-преобразование от прямоугольного отверстия. Распределение интенсивности

Распределение интенсивности в частотной плоскости соответственно равно

$$I(u, v) = 16A^2 a^2 b^2 \frac{\sin^2(ua)}{(ua)^2} \frac{\sin^2(vb)}{(vb)^2}.$$

### Пример. 7. Теорема масштабов для двумерного Фурье-преобразования

Уменьшим размеры отверстия в два раза. Получим отверстие со сторонами  $a$ ,  $b$ . Площадь отверстия уменьшили в четыре раза. Соответственно получим выражение для Фурье преобразования:

$$F(u, v) = A \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i(ux+vy)} dx dy = Aab \frac{\sin(ua/2)}{ua/2} \frac{\sin(vb/2)}{vb/2}$$

Амплитудный множитель уменьшился в четыре раза, а период Фурье-преобразования по каждому из двух ортогональных направлений дифракции увеличился в два раза. Интенсивность соответственно уменьшится в шестнадцать раз.

### Пример. 8. Круглое отверстие

Эта форма апертуры особенно часто встречается на практике, что в основном обусловлено высокой технологичностью изготовления отверстия круглой формы. Функция пропускания круглого отверстия

$$f(x, y) = \text{circ}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \begin{cases} 1; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0; \text{вне области} \end{cases}.$$

При вычислении Фурье-преобразования для круглого отверстия, в силу его симметрии целесообразно перейти к полярным координатам  $\rho$  и  $\varphi'$  в плоскости отверстия:

$$\xi = \rho \cos \varphi', \quad \eta = \rho \sin \varphi'.$$

Принимая распределение поля по отверстию  $F(\xi, \eta) = 1$ , получим выражение пропорциональное распределению амплитуды поля

$$g(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{jk\rho \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} \rho d\rho d\varphi',$$

где  $a$  - радиус отверстия. Введем новые переменные

$$r = \frac{\rho}{a}; \quad u = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$$

и получим

$$g(u, \varphi) = a^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{j u r \cos(\varphi - \varphi')} r dr d\varphi'.$$

Выполняя интегрирование по  $\varphi'$ , получим

$$g(u) = 2\pi a^2 \int_0^1 r J_0(ur) dr,$$

где  $J_0(ur)$  - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Интегрирование по  $r$  приводит к

$$g(u) = 2\pi a^2 \frac{J_1(u)}{u},$$

где  $J_1(u)$  - функция Бесселя первого рода первого порядка.



Рис. 2.18. Фурье-преобразование от круглого отверстия. Распределение интенсивности

### Пример. 9. Теорема масштабов. Эллиптическое отверстие

Эллиптическое отверстие может быть получено как аффинное преобразование круглого отверстия, путем изменения масштаба по одной из координатных осей. Изменение формы отверстия ведет к соответствующему изменению Фурье-спектра. При этом осевая симметрия отверстия и Фурье-спектра нарушаются. Эллиптическое отверстие имеет ось симметрии второго порядка, и, следовательно, Фурье-спектр также должен иметь ось симметрии второго порядка.

Фурье-спектр эллиптического отверстия легко получается из картины дифракции для круглого отверстия в соответствии с теоремой об изменении масштаба:

$$F(\rho, \varphi, \mu) = \frac{2J_1\left(\rho R \sqrt{\mu^2 \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}\right)}{\rho R \sqrt{\mu^2 \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}},$$

где  $J_1$  - функция Бесселя первого рода первого порядка;

$R$  - радиус круглого отверстия;

$\mu$  - степень эллиптичности.

Линии, соответствующие экстремумам Фурье-спектра являются эллипсами, оси которых ориентированы перпендикулярно ориентации эллиптического отверстия, что следует из теоремы об изменении масштаба.

### 3. Обобщенные функции. Свертка. Функция корреляции. Пространственная фильтрация

#### 3.1 Понятие обобщенных функций. Свойства. Операции

Обобщенные функции были введены в связи с трудностями решения некоторых задач математической физики, квантовой механики, электромагнетизма и т. д., где помимо непрерывных функций, описывающих непрерывно распределенные величины (масса, источники тепла, механический импульс и др.), понадобилось использовать разрывные функции для сосредоточенных величин (точечная масса, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и др.).

Из разрывных функций важную роль сыграла единичная функция  $\theta(x)$ , определенная следующим образом (рис. 3.1):

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Эта функция была введена в 1898 г. английским инженером Хевисайдом для решения операционными методами некоторых дифференциальных уравнений теории электрических цепей.

В 1926 г. английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ  $\delta$ , названный им дельта-функцией, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения  $\delta$ -функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начале координат. Если этот заряд имеет величину  $m$ , то его плотность

$$\rho(x) = m \delta(x).$$

Отсюда следует, что дельта-функция  $\delta(x)$  обладает свойствами

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (3.1)$$

Свойства этой функции хорошо интерпретируются при рассмотрении фундаментального соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad (3.2)$$

справедливого для любой функции  $f(x)$ , непрерывной при  $x = 0$ .

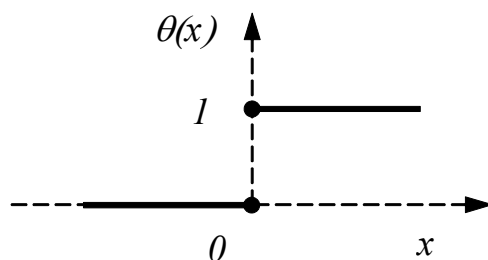


Рис. 3.1. Функция Хевисайда

Заметим, что, строго говоря,  $\delta(x)$  не представляет собой функцию, так как не существует функций, удовлетворяющих соотношениям (3.1 и 3.2). Но если интерпретировать последнее соотношение как функционал, т.е. как процесс придания функции  $f(x)$  значения  $f(0)$  то оно становится весьма интересным. Запись в виде интеграла используется просто как удобная форма описания свойств этого функционала (линейность сдвиг, замена переменных и т.д.). Таким образом, функцию  $\delta(x)$  можно рассматривать как обычную функцию, удовлетворяющую всем формальным правилам интегрирования при условии, что все заключения относительно этой функции базируются на выражении (3.2), а не на каком-либо из ее отдельных свойств.

Дельта функцию можно рассматривать как предел

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha t}{\pi t},$$

получаемый в результате использования основного соотношения

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \alpha t}{\pi t} dt = f(0).$$

Следствием данного предела является тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t).$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha t}{\pi t}.$$

Получился, таким образом, некоторый формализм в применении  $\delta$ -функции, с помощью которого достаточно просто были исследованы некоторые разрывные явления. В частности, было замечено, что между единичной функцией  $\theta(x)$  и функцией  $\delta(x)$  существует связь

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx},$$

которая, очевидно, не имеет смысла в рамках классического анализа, но справедлива в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим некоторые свойства  $\delta$ -функции.

Если  $f(t)$  не имеет разрывов в точке  $t$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \delta(x) dx = f(t).$$



## Гребенчатая функция

Ряд, состоящий из бесконечного числа  $\delta$ -функций, сдвинутых относительно друг друга на равные расстояния

$$Ш_a(x) \equiv \frac{1}{|a|} \text{comb}(x/a) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na),$$

называется гребенчатой функцией. При  $a = 1$  имеем:

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n).$$

Гребенчатая функция, как это видно из соотношения симметрична относительно преобразования Фурье:

$$F\{\text{comb}(x)\} = \text{comb}(X).$$

Гребенчатая функция играет важную роль при описании процессов дискретизации сигналов. Процедуру дискретизации (взятие выборок) удобно рассматривать как умножение сигнала  $f(x)$  на заданную периодическую последовательность тактовых импульсов, задаваемую функцией  $Ш_a(x)$ .

## 3.2. Свертка

Всякая физическая величина характеризуется совокупностью производимых ею функций. Такими эффектами могут быть отклики приборов на воздействие, оказываемое рассматриваемой функцией на входе. Поэтому описание физической величины распределением значений, приписываемых ее пробным функциям из основного пространства, представляется естественным, если эти функции можно отождествить с аппаратными функциями приборов. Это относится и к электромагнитному полю. Описание поля и его источников обобщенными функциями упрощает решение краевых задач оптики, связанных с дифракцией волн на поверхностных неоднородностях. Существуют две возможности использования функционалов в практических применениях теории систем – для описания самой системы и для описания действующего на систему объекта. В качестве последнего может выступать, например, электромагнитное поле. Обе эти возможности используются в физике и технике, а также в метрологии, в частности при установлении соответствия между понятием меры физических объектов, таких как процессы и поля, и общим математическим понятием меры как вполне аддитивной неотрицательной функции множеств.

В оптике свертка – это операция, которая производится измерительными приборами и в результате которой получается размытое (неясное) изображение изучаемого объекта. Изображение точки в любом оптическом приборе никогда не бывает точкой, а представляет собой пятно. Размеры этого пятна определяются качеством прибора. В оптическом приборе изображения двух различных точек будут разделены только при условии, что расстояние между

точками превышает некоторую минимальную величину, определяющую возможность разрешения.

Понятие свертки и разрешающей способности можно найти в любой области науки и техники. В радиоэлектронике при поступлении на вход амплитудного анализатора импульса бесконечно малой продолжительности на выходе анализатора наблюдается сигнал конечной ненулевой продолжительности (длительность выходного сигнала определяется шириной полосы пропускания прибора). Аналогичное явление происходит в оптике, когда изображение считывается каким либо фотоэлектрическим преобразователем. Считанное изображение всегда будет отличаться от исходного из-за конечного размера апертуры фотоэлектрического преобразователя. Т.е. происходит свертка распределения интенсивности в изображении с функцией, описывающей форму приемной апертуры фотоэлектрического преобразователя.

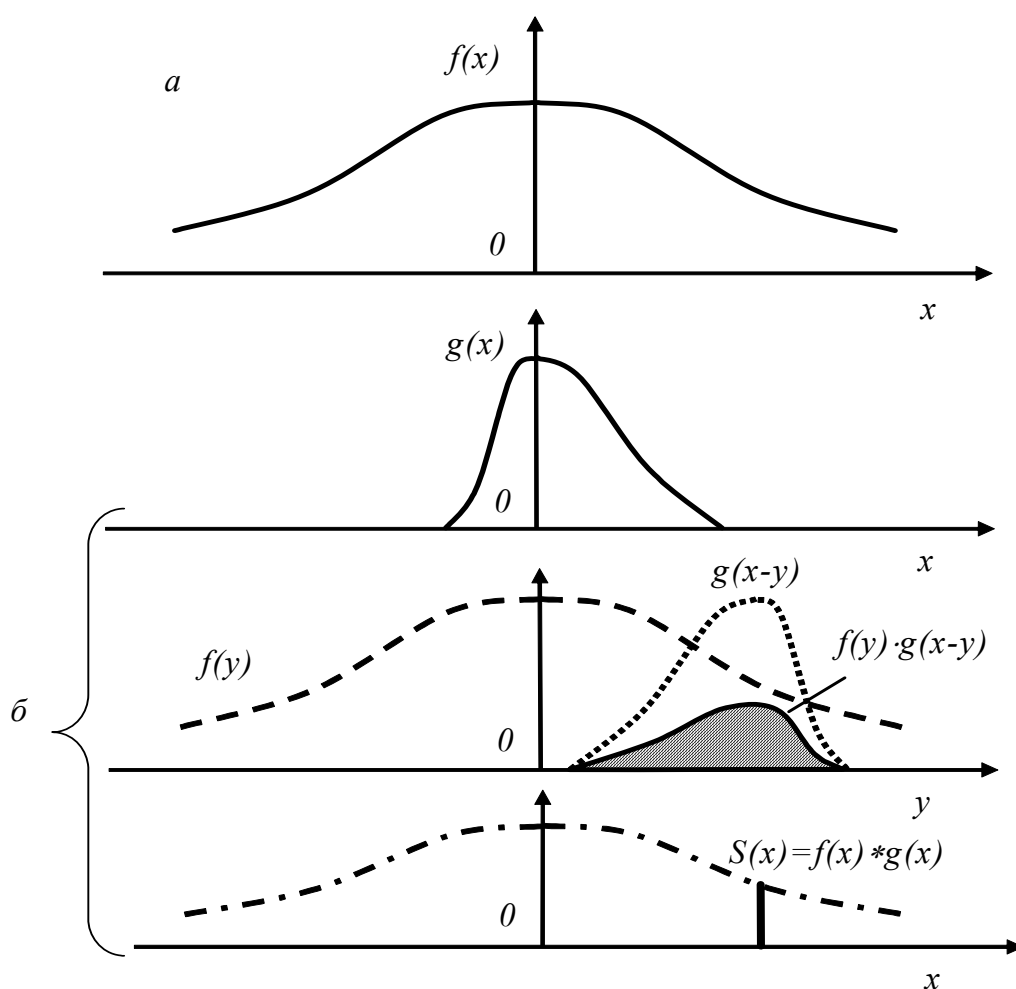


Рис. 3.2 Физическая интерпретация свертки

Сигнал на выходе, соответствующий импульсу бесконечно малой продолжительности на входе, называется импульсным откликом. Поэтому любой входной сигнал изменяет свою форму на выходе. Зная импульсный отклик  $g(x)$  системы, предполагаемой линейной и стационарной во времени (в

этом случае применима теорема сложения сигналов), можно ли по входному сигналу  $f(x)$  рассчитать выходной сигнал  $S(x)$ ?

Решение этой задачи осуществляется с помощью свертки.

Рисунок 3.2 иллюстрирует фактическое содержание операции свертки. Входной сигнал  $f(x)$  показан на рис. 3.2. а, а импульсный отклик  $g(x)$  – на рис. 3.2. б. Для нахождения графика  $g(x-y)$ , как функции переменной  $y$ , необходимо зеркально отобразить график функции  $g(y)$  относительно оси ординат, сместить его параллельно оси абсцисс на величину  $x$ , произвести поточечное умножение  $f(y) \cdot g(x-y)$  и проинтегрировать произведение. Полученное значение интеграла равно значению свертки при аргументе  $y$ .

Импульсный отклик  $g(x)$  отличен от нуля только на ограниченном промежутке  $(\theta_1, \theta_2)$ . Уравнение свертки имеет вид:

$$S(x) = \int_{x-\theta_2}^{x-\theta_1} f(y)g(x-y)dy.$$

Для операции свертывания функций роль единичного элемента играет дельта-функция Дирака  $\delta(x)$ .

### 3.3 Корреляция

Корреляционный анализ наряду со спектральным играет большую роль в теории сигналов. В настоящее время корреляция является наиболее широко распространенным методом обработки различных сигналов и данных (оптических и других). При всех своих различных проявлениях корреляция, по существу, является методом оценки взаимных связей, имеющих форму подобий или совпадений. Таким образом, процесс корреляции сводится к сравнению (сопоставлению) двух картин или процессов.

Сопоставление картин, сигналов или процессов можно произвести используя понятие корреляционной функции. Корреляционная функция (англ. – correlation function) детерминированного сигнала с конечной энергией представляет собой интеграл (в бесконечных пределах) от произведения двух копий сигналов, сдвинутых друг относительно друга на время  $\tau$ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Корреляционная функция показывает степень сходства между сигналом и его сдвинутой копией – чем больше значение корреляционной функции, тем это сходство сильнее. Поскольку здесь функция  $s(t)$  сравнивается сама с собой, ее называют *автокорреляционной функцией*.

Корреляционная функция обладает следующими свойствами:

1. Значение корреляционной функции при  $\tau = 0$  равно энергии сигнала, то есть интегралу от его квадрата:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E.$$

2. Корреляционная функция является четной функцией аргумента  $\tau$ :

$$B_s(\tau) = B_s(-\tau).$$

3. При  $\tau = 0$  корреляционная функция принимает максимальное значение:

$$B_s(\tau) \leq B_s(0).$$

4. С ростом абсолютного значения  $\tau$  корреляционная функция сигнала с конечной энергией затухает:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0.$$

Поясним физический смысл автокорреляционной функции на примере сигнала в виде одиночного прямоугольного импульса.

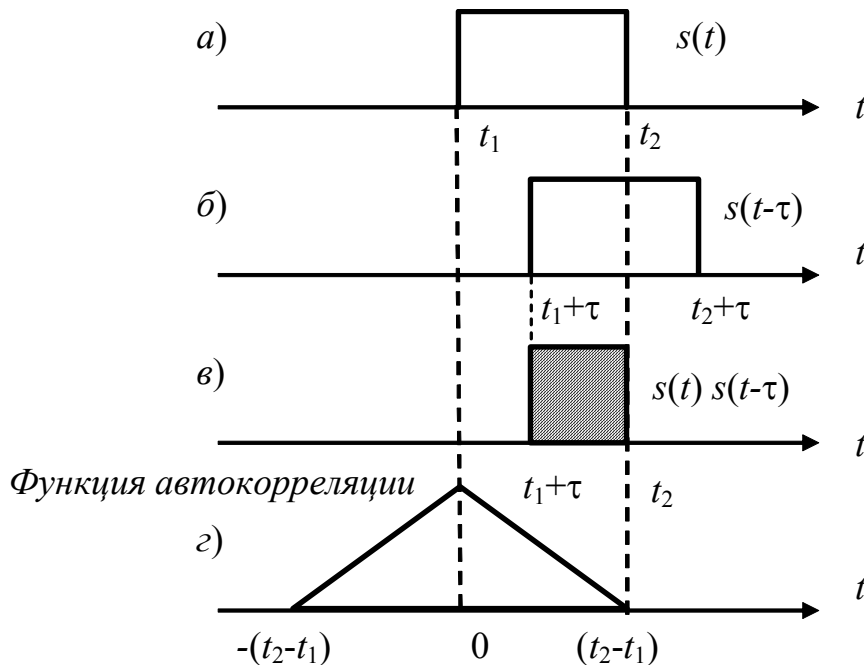


Рис. 3.3. Физическая интерпретация автокорреляционной функции

## Периодический сигнал

В случае периодического сигнала использовать приведенное выше определение корреляционной функции нельзя.

Корреляционную функцию периодического сигнала с периодом  $T$  вычисляют, усредняя произведение сдвинутых копий в пределах одного периода:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Некоторые свойства, введенной таким способом корреляционной функции, изменяются.

1. Значение при  $\tau = 0$  равно не энергии, а средней мощности анализируемого сигнала:

$$B_s(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{cp}.$$

2. Свойство четности функции сохраняется:  $B_s(\tau) = B_s(-\tau)$ .

3. При  $\tau = 0$  корреляционная функция периодического процесса также принимает максимальное значение:  $B_s(\tau) \leq B_s(0)$ .

4. Корреляционная функция периодического сигнала является периодической функцией с тем же периодом, что и сигнал:  $B_s(\tau + T) = B_s(\tau)$ .

5. Размерность корреляционной функции периодического сигнала – квадрат размерности сигнала.

Если сдвиг  $\tau$  кратен периоду функции, то получаем максимум «сходства» между сдвинутыми друг относительно друга функциями. Это свойство корреляционной функции случайного процесса позволяет выявлять периодичность функции, которую бывает затруднительно обнаружить при обычном исследовании.

### Взаимная корреляционная функция

Взаимно корреляционная функция показывает степень сходства для сдвинутых экземпляров двух разных сигналов. Эту функцию называют также *кросс-корреляционной функцией*. Общий вид формулы для нахождения взаимно корреляционной функции сохраняется, но под интегралом стоит произведение двух разных сигналов, один из которых задержан на время  $\tau$ .

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt.$$

Свойства взаимно корреляционной функции несколько отличаются от свойств корреляционной функции:

$$1. \quad |B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}, \quad \text{где } E_1 \text{ и } E_2 - \text{энергии сигналов } s_1(t) \text{ и } s_2(t).$$

2.  $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$ , то есть изменение знака  $\tau$  равносильно взаимной перестановке сигналов.

3. Значение взаимно корреляционной функции при  $\tau = 0$  ничем не выделяется, так как максимум функции может быть расположен в любом месте оси  $\tau$ .

Иногда бывает удобно нормировать корреляционные функции. Нормировка достигается делением выражений на центральное значение корреляции, т.е. на значение для  $\tau = 0$  (нулевой сдвиг). Это дает для автокорреляционной функции

$$\gamma_{ss}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}.$$

Аналогичное выражение получается для кросс-корреляционной функции

$$\gamma_{s_1 s_2}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt},$$

где \* означает комплексное сопряжение, т.к. в общем случае функции  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  могут быть комплексными.

### Теорема автокорреляции (теорема Винера-Хинчина)

Эта теорема утверждает, что преобразование Фурье автокорреляции функции  $s(t)$  равно квадрату модуля ее преобразования Фурье.

В общем случае если преобразование комплексной функции есть  $F(\omega)$ , то согласно этой теореме преобразование  $|F(\omega)|^2$  является комплексной автокорреляцией от  $s(t)$ .

Используя  $T$  для обозначения преобразования Фурье, мы имеем

$$T\left[|F(\omega)|^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \exp(2\pi i t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \exp(2\pi i t) d\omega = s(t) * s^*(-t).$$

Таким образом, если мы знаем автокорреляционную функцию, то ее Фурье-преобразование даст нам интенсивность Фурье-спектра.

### 3.4. Пространственная фильтрация

Оптическая обработка изображения в противоположность построению изображения связана с вмешательством в процесс. Это вмешательство может осуществляться разными способами. Ее практическое применение основано на способности оптических систем выполнять общие линейные преобразования поступающих на вход данных.

Первое сообщение об экспериментах по сознательному воздействию на спектр изображения было опубликовано Аббе в 1873 году, а затем Портером в 1906 г. Целью этих экспериментов была проверка созданной Аббе теории формирования изображений в микроскопе и исследование пределов ее применимости.

Объектом исследования в экспериментах служила сетка из тонкой проволоки, освещаемая когерентным светом.

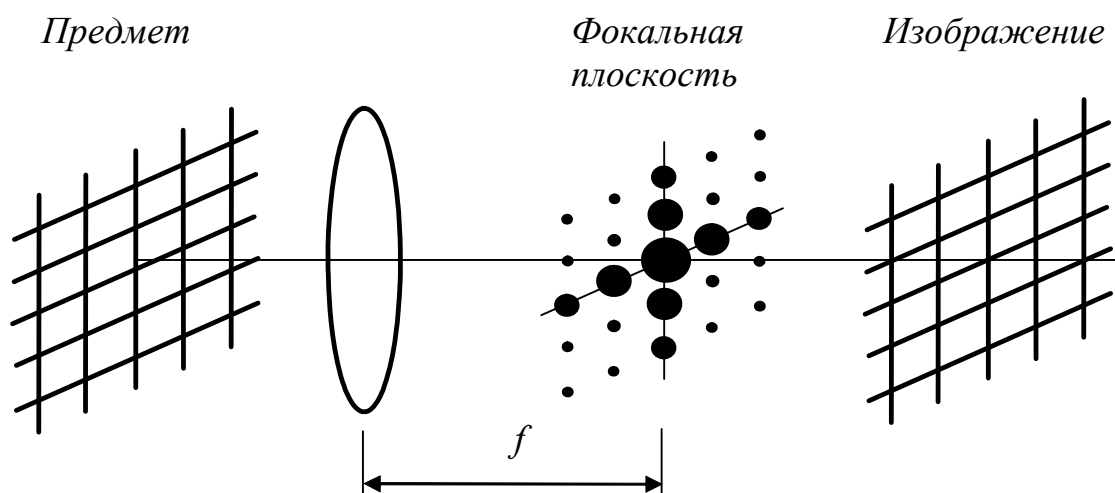
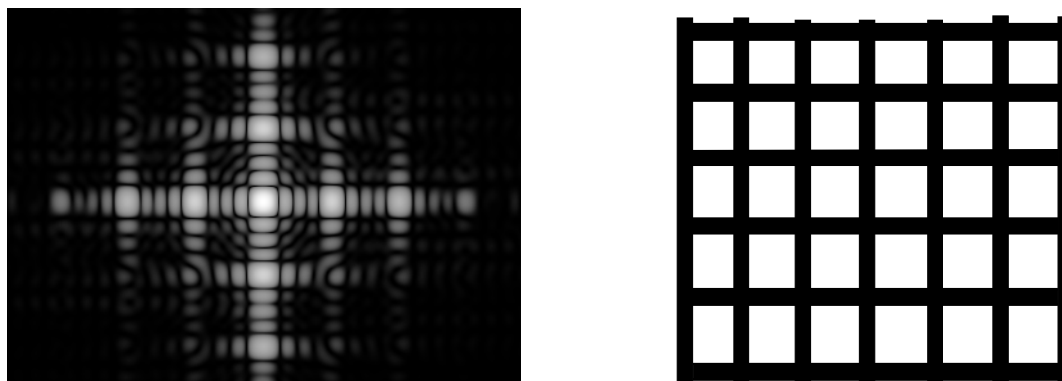


Рис. 3.4. Схема эксперимента Аббе-Портера

В задней фокальной плоскости линзы получается Фурье-спектр сетки, имеющей периодическую структуру. Различные Фурье-компоненты, прошедшие через линзу, суммируясь, дают в плоскости изображения точную копию решетки. Помещая в фокальную плоскость различные препятствия (ирисовую диафрагму, щель, экран), можно непосредственно воздействовать на спектр изображения.

Фурье-спектр периодического предмета представляет собой набор отдельных спектральных компонент, ширина каждой из которых определяется характерным размером оправы, ограничивающей объект. Яркие пятна вдоль горизонтальной оси в фокальной плоскости соответствуют комплексным экспоненциальным компонентам, направленным горизонтально (рис. 3.5); яркие пятна вдоль вертикальной оси соответствуют вертикально направленным

комплексным экспоненциальным компонентам. Вне осевые пятна соответствуют компонентам, направленным под соответствующим углом в плоскости предмета.



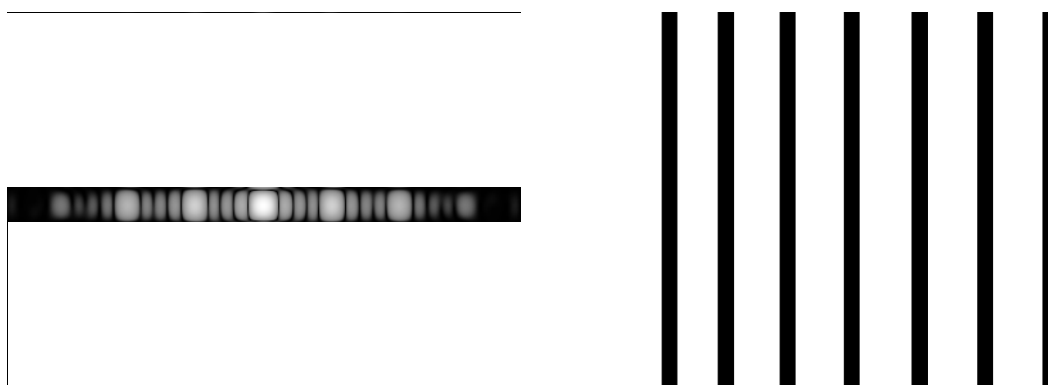
*a*

*б*

Рис. 3.5. Изображение входной сетки и ее спектра.

*a* – спектр; *б* – изображение

Если в фокальную плоскость поместить узкую щель так, чтобы через нее проходил только один ряд спектральных компонент, расположенных горизонтально (рис. 3.4), то изображение будет содержать только вертикальную структуру сетки (рис. 3.6).



*a*

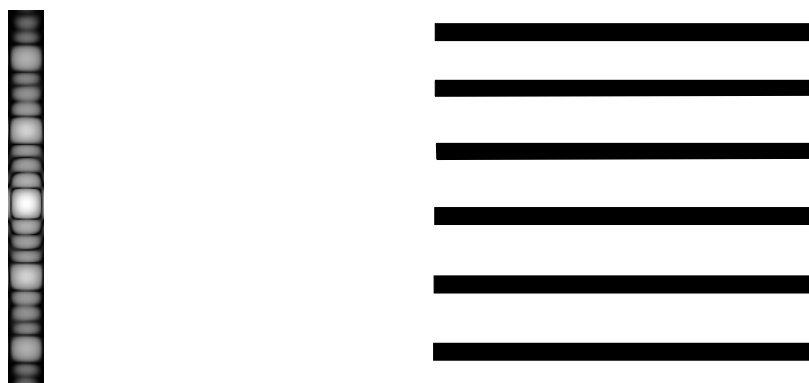
*б*

Рис. 3.6. Спектр сетки, отфильтрованный горизонтальной щелью (*a*) и соответствующее изображение (*б*)

Следовательно, именно горизонтально направленные комплексные экспоненциальные компоненты дают вклад в вертикальную структуру изображения. При этом горизонтальная структура изображения полностью пропадает.



Если развернуть щель на  $90^\circ$  так, чтобы через нее проходил лишь вертикальный ряд спектральных компонент (рис. 3.4), то получающееся изображение будет содержать только горизонтальную структуру (рис. 3.7).



*a*

*б*

Рис. 3.7 *Спектр сетки, отфильтрованный вертикальной щелью (a) и соответствующее изображение б*

При пространственной фильтрации Фурье-спектра такой периодической структуры интересно наблюдать и еще ряд эффектов. Если на оси линзы в фокальной плоскости поместить маленький экран, закрывающий только центральный порядок, или компоненту «нулевой частоты», то мы получим изображение сетки с обращенным контрастом.

### 3.5. Примеры

#### Определение корреляционных функций детерминированных сигналов

Найдем автокорреляционную функцию  $K(\tau)$  одиночного прямоугольного импульса амплитуды  $A$  и длительностью  $\tau_u$ . Вычислим коэффициент корреляции  $r(\tau)$  и интервал корреляции.

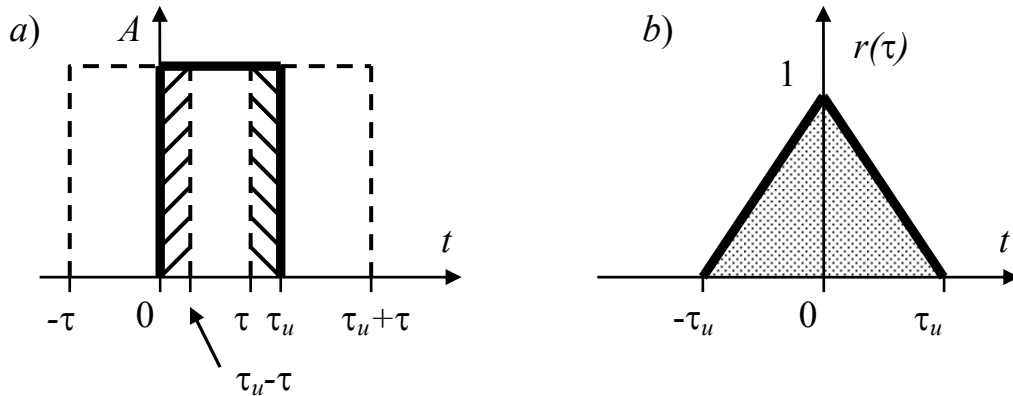


Рис. 3.8. Нахождение функции автокорреляции. а) – исходный импульс, б) – график коэффициента корреляции (жирной линией показано исходное положение импульса, а пунктиром – копии импульса, сдвинутые на интервал  $\tau$  влево и вправо относительно исходного положения)

Из рисунка 3.8 видно, что перекрытие импульсов имеет место при  $0 < \tau < \tau_u$ . Следовательно, автокорреляционная функция  $K(\tau)$  отлична от нуля на интервалах  $[0, \tau_u - \tau]$  и  $[\tau, \tau_u]$ . Переменный сдвиг  $\tau$  соответствует только положительным значениям, следовательно, при подстановке его в пределы интегрирования нужно использовать абсолютное значение  $|\tau|$ :

$$K(\tau) = A^2 \int_{|\tau|}^{\tau_u} dt = A^2 (\tau_u - |\tau|).$$

При  $\tau = 0$  значение функции автокорреляции  $K(0) = A^2 \tau_u$ .

Коэффициент корреляции

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)} = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}.$$

#### Свертка

Измеренная интенсивность выражается через интенсивность спекл-картины как свертка с функцией, описывающей форму приемной апертуры

$$I'(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I(x_1, y_1) B(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

Рассмотрим достаточно распространенный случай – дифракция на объекте типа щелевое отверстие. Распределение интенсивности в плоскости фотоприемника

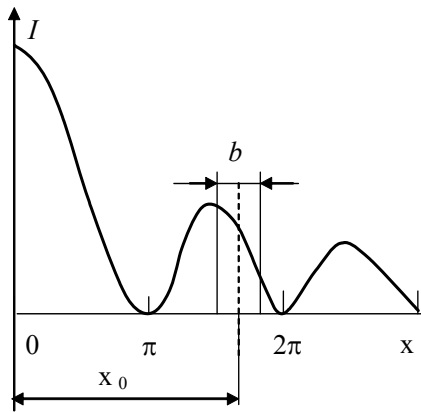


Рис. 3.9. Схема расчета влияния полевой диафрагмы

$$I = I_0 \sin^2 x / x^2 .$$

Световой поток, падающий на фотоприемник в каждый момент времени, с точностью до постоянного множителя

$$\Phi(x_0) = \int_{x_0-b/2}^{x_0+b/2} \frac{2(1 - \cos 2x)}{(2x)^2} dx ,$$

где  $x_0$  – координата середины сканирующей щелевой диафрагмы;  $b$  – ширина щели;  $b = k\pi$  (см. рис. 3.9).

Преобразуя последнее выражение, получим

$$\Phi(x_0) = \frac{2k\pi}{(2x_0)^2 - (k\pi)^2} + \frac{\cos(2x_0 + k\pi)}{(2x_0 + k\pi)} - \frac{\cos(2x_0 - k\pi)}{(2x_0 - k\pi)} + Si(2x_0 + k\pi) - Si(2x_0 - k\pi),$$

где Si – интегральный синус.

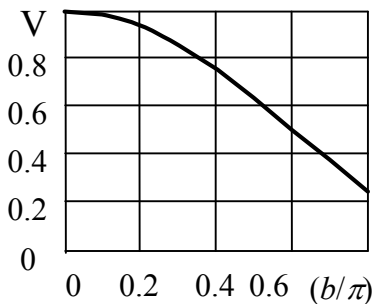


Рис. 3.10. Влияние ширины щели фотоприемника на контраст ДК

Анализ данного выражения показывает, что с увеличением отношения  $b/\pi$  величина светового потока растет и, следовательно, растет амплитуда электрического сигнала. Контраст ДК при этом уменьшается (рис. 3.10). Форма кривой при этом также изменяется, что может привести к изменению расстояния между точками с минимальной интенсивностью, несущих информацию о размере объекта.

**Измеренное и истинное значения контрастности.** Рассмотрим случай считывания интерференционной картины с помощью фотоприемника с конечным размером чувствительной площадки (перед фотоприемником установлена щелевая диафрагма).

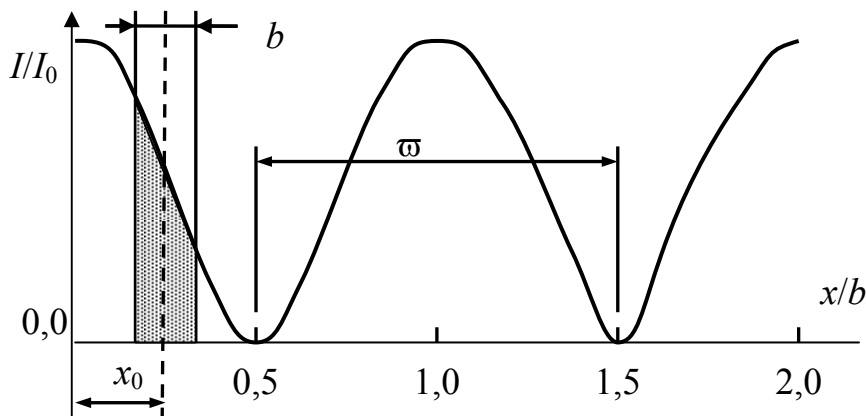


Рис. 3.11. К расчету интенсивности света, прошедшего через щель шириной  $b$

Распределение интенсивности в интерференционной картине можно описать функцией  $\cos^2(\pi x/b)$ , где  $b$  - ширина щелевой диафрагмы, а  $\varpi$  - ширина интерференционного максимума,  $x$  – текущая координата. Такая запись аргумента функции позволяет выразить результат расчета в относительных величинах, что удобно для последующего анализа.

Функцию косинус квадрат выразим через косинус двойного угла  $\cos^2(\pi x/\varpi) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi x/\varpi)]$ . В этом случае вычисление интеграла упрощается.

Энергия света, проходящего через щель шириной  $\varpi$ , пропорциональна заштрихованной на рис. области

$$W = 2I_0 \int_{x_0-b/2}^{x_0+b/2} [1 + \cos(2\pi x/\varpi)] dx,$$

где  $x_0$  – координата середины щели. Интегрирование дает

$$W = 2I_0 \left( \varpi + \frac{\varpi}{\pi b} \sin \frac{\pi b}{\varpi} \cos \frac{2\pi x_0}{\varpi} \right).$$

При перемещении щели или полос по полю максимальное и минимальное значения энергии:

$$W_{\max} = 2I_0 \left( b + \frac{\varpi}{\pi b} \sin \frac{\pi b}{\varpi} \right)$$

$$W_{\min} = 2I_0 \left( b - \frac{\varpi}{\pi b} \sin \frac{\pi b}{\varpi} \right)$$

Отсюда измеренная контрастность полос

$$K' = \frac{W_{\max} - W_{\min}}{W_{\max} + W_{\min}} = \frac{\sin(\pi b/\varpi)}{\pi b/\varpi}.$$

## 4. Дифракция и интерференция света

### 4.1. Определение

Как показывает опыт, свет при определенных условиях может заходить в область геометрической тени. Если на пути параллельного светового пучка расположено круглое препятствие (круглый диск, шарик или круглое отверстие в непрозрачном экране), то на экране, расположенном на достаточно большом расстоянии от препятствия, появляется **дифракционная картина** – система чередующихся светлых и темных колец. Если препятствие имеет линейный характер (щель, нить, край экрана), то на экране возникает система параллельных дифракционных полос.

**В соответствии с определениями, приводимыми в сборнике рекомендуемых терминов [Физическая оптика. Терминология. Сб. рекомендуемых терминов. Вып. 74. АН СССР. М., Наука, 1968, 32 с.]** дифракция и интерференция имеют следующие определения:

- **дифракция света** – обусловленное волновой природой света явление отклонения от законов распространения света геометрической оптики, возникающее при прохождении света в среде с резкими оптическими неоднородностями. **Дифракция** – [*лат.* diffractus разломанный];

- **интерференция света** – явление, возникающее при сложении световых волн и состоящее в том, что интенсивность результирующей световой волны, в зависимости от разности фаз, складывающихся волн, может быть больше или меньше суммы их интенсивностей. **Интерференция** – [*англ.* помеха, вмешательство; (взаимное) влияние].

**Дифракционные явления** были хорошо известны еще во времена Ньютона, но объяснить их на основе корпускулярной теории света оказалось невозможным. Первое качественное объяснение явления дифракции на основе волновых представлений было дано английским ученым Т. Юнгом. Независимо от него французский ученый О. Френель развил количественную теорию дифракционных явлений (1818 г.). В основу теории Френель положил принцип Гюйгенса, дополнив его идеей об интерференции вторичных волн. Принцип Гюйгенса в его первоначальном виде позволял находить только положения волновых фронтов в последующие моменты времени, т. е. определять направление распространения волны. По существу, это был принцип геометрической оптики. Гипотезу Гюйгенса об огибающей вторичных волн Френель заменил физически ясным положением, согласно которому вторичные волны, приходя в точку наблюдения, интерферируют друг с другом. Принцип Гюйгенса–Френеля также представлял собой определенную гипотезу, но последующий опыт подтвердил ее применимость. В ряде практически важных случаев решение дифракционных задач на основе этого принципа дает достаточно хороший результат.

Но нужно отдавать себе отчет, что и в принципе Гюйгенса, и в теории Френеля вторичные (элементарные) источники и вторичные волны являются фиктивными.

Дифракция волн наблюдается независимо от их природы и может проявляться:

- в преобразовании пространственной структуры волн. В одних случаях такое преобразование можно рассматривать как «огибание» волнами препятствий, в других случаях – как расширение угла распространения волновых пучков или их отклонение в определенном направлении;
- в разложении волн по их частотному спектру;
- в преобразовании поляризации волн;
- в изменении фазовой структуры волн.

Дифракционные эффекты зависят от соотношения между длиной волны и характерным размером неоднородностей среды либо неоднородностей структуры самой волны. Наиболее сильно они проявляются при размерах неоднородностей сравнимых с длиной волны. При размерах неоднородностей существенно превышающих длину волны (на 3–4 порядка и более), явлением дифракции, как правило, можно пренебречь. В последнем случае распространение волн с высокой степенью точности описывается законами геометрической оптики. С другой стороны, если размер неоднородностей среды много меньше длины волны, то в таком случае вместо дифракции часто говорят о явлении рассеяния волн.

Традиционно дифракцию Фраунгофера рассматривают отдельно от дифракции Френеля и считают ее частным случаем. Традиция эта имеет историческое происхождение. Было время, когда исследовалось дифракционное волновое поле лишь по отдельным его характеристикам, прежде всего по интенсивности, т.е. некомплексно. Продифрагировав, световые лучи в дальнейшем распространяются прямолинейно, а видоизменение дифракционных картин, в том числе, в том числе и переход от френелевых картин к фраунгоферовой, обусловлено лишь пространственным перераспределением уже продифрагировавших лучей и не сопровождается какими-либо реальными физическими процессами. С этой точки зрения нужно классифицировать не виды дифракции света, а виды дифракционных картин, в то время как собственно дифракция света во всех случаях одна и та же и не зависит, например, от расстояния, на котором наблюдается дифракционная картина [Э.С. Попов. Лучевая теория дифракции света].

#### **4.2. Тонкости в толковании термина «дифракция»**

В явлении дифракции важную роль играют исходные размеры области волнового поля и исходная структура волнового поля, которая подвержена существенной трансформации в случае, если элементы структуры волнового поля сравнимы с длиной волны или меньше её. Например, ограниченный в пространстве волновой пучок имеет свойство «расходиться» («расплываться») в пространстве по мере распространения даже в однородной среде. Данное явление, не описывается законами геометрической оптики и относится к дифракционным явлениям (дифракционная расходимость, дифракционное расплывание волнового пучка). Исходное ограничение волнового поля в пространстве и его определенная структура могут возникнуть не только за счет

присутствия поглощающих или отражающих элементов, но и, например, при порождении (генерации, излучении) данного волнового поля.

Изначально явление дифракции трактовалось как огибание волной препятствия, то есть проникновение волны в область геометрической тени. Следует заметить, что в средах, в которых скорость волны плавно (по сравнению с длиной волны) меняется от точки к точке, распространение волнового пучка является криволинейным (см. градиентная оптика, градиентные волноводы, мираж). При этом волна также может огибать препятствие. Однако такое криволинейное распространение волны может быть описано с помощью уравнений геометрической оптики, и это явление не относится к дифракции. Отступление от прямолинейности распространения света наблюдается также в сильных полях тяготения. Экспериментально подтверждено, что свет, проходящий вблизи массивного объекта, например, вблизи звезды, отклоняется в ее поле тяготения в сторону звезды. Таким образом, и в данном случае можно говорить об «огибании» световой волной препятствия. Однако, это явление также не относится к дифракции. Вместе с тем, во многих случаях дифракция может быть, и не связана с огибанием препятствия. Такова, например, дифракция на непоглощающих (прозрачных) так называемых фазовых структурах.

С точки зрения современной науки определение дифракции как огибания светом препятствия признается недостаточным (слишком узким) и не вполне адекватным.

Поскольку, с одной стороны, явление дифракции света оказалось невозможным объяснить с точки зрения лучевой модели, то есть с точки зрения геометрической оптики, а с другой стороны, дифракция получила исчерпывающее объяснение в рамках волновой теории, то часто под дифракцией понимают проявление любого отступления от законов геометрической оптики. При этом следует заметить, что некоторые волновые явления не описываются законами геометрической оптики и, в тоже время, не относятся к дифракции. К таким типично волновым явлениям относится, например, вращение плоскости поляризации световой волны в оптически активной среде, которое дифракцией не является. Вместе с тем, единственным результатом так называемой коллинеарной дифракции с преобразованием оптических мод может быть именно поворот плоскости поляризации, в то время как дифрагированный волновой пучок сохраняет исходное направление распространения. Такой тип дифракции может быть реализован, например, как дифракция света на ультразвуке в двулучепреломляющих кристаллах, при которой волновые векторы оптической и акустической волн параллельны друг другу. Еще один пример: с точки зрения геометрической оптики невозможно объяснить явления, имеющие место в так называемых связанных волноводах, хотя эти явления также не относят к дифракции (волновые явления, связанные с «вытекающими» полями). Общим свойством всех эффектов дифракции является именно определенная зависимость данного явления от соотношения между длиной волны и размером неоднородностей среды. Поэтому дифракция

представляет собой универсальное волновое явление и характеризуется одними и теми же законами в случае волн разной природы.

### **4.3. Единство и различие явлений дифракция и интерференция**

По своему происхождению дифракция и интерференция два различных понятия, что отразилось и в смысле слов, которыми их обозначили. Дифракция это дробление, разделение, разламывание, а интерференция это взаимное влияние, смешивание. Таким образом, если дифракция по своей функции это разделение, то интерференция это соединение, то есть эти два явления по своему проявлению суть противоположности.

Рассмотрение сущности этих явлений с точки зрения выявления их общности и различий нужно проводить на основании механизма взаимодействия света с веществом, поскольку все наблюдаемые оптические эффекты проявляются в результате взаимодействия света с веществом.

Все вещества состоят из атомов и молекул. И именно взаимодействие света с атомами и молекулами и определяет все наблюдаемые процессы.

Основные характеристики взаимодействия света с атомом, в частности повторное излучение без изменения частоты, можно получить заменой атома электронным осциллятором. Всякий раз, когда свет проходит через атом, находящийся в основном состоянии, в атоме возникают общие колебания таких же типов и силы, которые должны совершать осцилляторы в рассматриваемой модели при облучении их светом. Электронное облако каждого атома совершает колебания под действием света. Облако колеблется с частотой падающего света, и с амплитудой, соответствующей амплитуде колебаний в осцилляторной модели.

Именно эти колебания, амплитуда которых менее  $10^{-17}$  м, и обеспечивают вторичное испускание света, в результате чего мы и видим все предметы. Движение осциллятора, облучаемого светом, является суперпозицией всех движений, которые он совершал бы при облучении совокупностью световых волн. Следовательно, для изучения поведения атомов под действием света достаточно лишь знать движение осцилляторов, возбуждаемое электрической волной определенной частоты и фазы.

Если на электронный осциллятор падает электромагнитная волна с частотой  $\omega$ , то действие электрического поля проявляется как периодическая сила и приводит к появлению характеристических колебаний. Периодическое электрическое поле вызывает колебания осциллятора с частотой и фазой падающего поля  $\omega$ , а не с собственной резонансной частотой  $\omega_0$ . Амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде внешней силы, а фазовая постоянная определенным образом связана с фазовой постоянной внешней силы.

Для неоднородного линейного уравнения, описывающего колебания осциллятора под действием внешней силы, справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в том, что решение, соответствующее суперпозиции различных внешних сил, представляет собой суперпозицию отдельных решений.



При дифракции падающая (в общем случае одна) волна взаимодействует с “границей” вещества. На границе вещества атомы переизлучают падающую волну в разных направлениях – волна “разламывается”. При интерференции же волны (как минимум две волны) падают (взаимодействуют) на одни и те же атомы вещества, одновременно возбуждая их, причем каждая со своей фазой и амплитудой, а в общем случае еще и со своей частотой. Поэтому, при определенных соотношениях фаз падающих волн, атом (осциллятор) может возбуждаться резонансно и в этом случае интенсивность рассеянного излучения возрастает, а при каком-то другом соотношении фаз, возбуждаемые в атоме колебания взаимно гасятся и переизлученной волны не возникает. В первом случае мы наблюдаем (регистрируем) максимум интенсивности, а во втором минимум.

Таким образом, два, казалось бы, совершенно разных явления, оба обусловлены взаимодействием света с веществом.

#### 4.4. Принцип Бабине

При практическом изучении дифракционных задач очень часто возникает необходимость в рассмотрении дифракционных полей от объектов взаимно дополняющих друг друга. Дополнительными здесь называются такие объекты, когда отверстие в экране совпадает с другим экраном, так, например, круглому отверстию в плоском экране соответствует плоский диск, который дополняет экран до сплошной поверхности. В этом случае принцип Бабине утверждает, что результаты, полученные для расчета задачи дифракции на отверстии можно сразу перенести на случай дифракции на плоском дополнительном экране. При дифракции Фраунгофера, исходя из принципа Бабине, получается простое правило: оба дополнительных экрана создают интерференционные картины с одинаковой интенсивностью.

Пусть  $U_1(P)$  и  $U_2(P)$  комплексные амплитуды дифракционного поля, когда один из экранов помещен между источником и плоскостью наблюдения. Тогда, поскольку эти поля получены одно при интегрировании по отверстию  $U_1(P)$ , а другое  $U_2(P)$  - по остальной поверхности, то в сумме они дают поле, которое получится, если интегрировать по полной поверхности, в отсутствие экрана.

$$U_1(P) + U_2(P) = U.$$

Из принципа Бабине следует важное свойство. Если  $U = 0$ ,  $U_1(P) = -U_2(P)$ , т.е. в точках, где  $u$  равно нулю, фазы  $U_1(P)$  и  $U_2(P)$  различаются на  $\pi$ , а интенсивности  $I_1 = |U_1(P)|^2$  и  $I_2 = |U_2(P)|^2$  одинаковы  $I_1 = I_2$ .

Следует отметить: степень приближения, при которой справедлив принцип Бабине, такая же, как и в случае теории Кирхгофа. Принцип Бабине строго выполняется для идеального отражающего плоского экрана.

#### 4.5. Контраст дифракционной картины

Проблема использования стандартного определения понятия контраста ДК связана со спецификой изменения интенсивности: она с одной стороны асимптотически затухает с большой скоростью, причем для разных направлений скорость затухания может отличаться, а с другой стороны

изменяется и сам вид ДК. Для характеристики качества ДК необходимо уменьшить количество ее информационных параметров. И, в первую очередь, нужно устранить параметр ДК, связанный со скоростью затухания, что позволит представить ее в более регулярном виде, упростить процесс регистрации и дальнейшего преобразования. Наиболее оптимальными вариантами уменьшения диапазона интенсивностей в ДК являются различные способы оптической пространственной фильтрации.

Наиболее часто закон пропускания фильтра выбирается из условия выравнивания распределения интенсивности в пределах всего регистрируемого спектра. В результате этой операции распределение интенсивности в ДК за фильтром приобретает синусоидальный вид.

Распределение интенсивности в сечении выровненной ДК можно представить в следующем виде

$$\sin^2(x) = [1 - \cos(2x)]/2.$$

Синусоидальное распределение интенсивности вызывает «перераспределение» энергии в спектре сигнала. Фурье-спектр выровненной ДК имеет две ярко выраженные линии, соответствующие нулевой пространственной частоте и основному периоду выровненной ДК (рис. 4.1). Спектр выровненного распределения интенсивности уже является интегральной характеристикой сечения ДК и существенно не зависит от числа регистрируемых дифракционных лепестков.

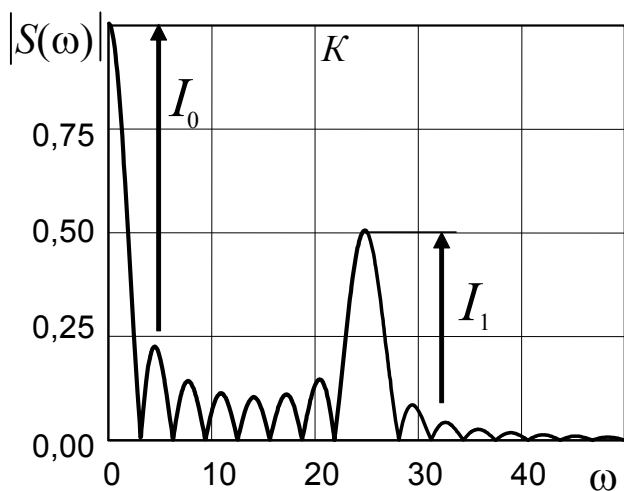


Рис. 4.1. Фурье-спектр выровненной ДК

Типовые объекты дифракции, как показано выше, имеют Фурье-спектр, который условно можно представить в виде произведения гармонической функции на функцию, определяющую затухание спектра. Преобразование распределения интенсивности невозмущенной ДК (выравнивание) приводит ее к виду аналогичному распределению интенсивности при интерференции двух плоских волн. Эту аналогию можно было бы использовать для оценки контраста.

Но, в силу того, что влияние возмущений облучающего поля и вида объекта различным образом сказываются на амплитуде дифракционных порядков, непосредственно использовать выровненный спектр в соответствии с формулой

контраста  $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$  представляется затруднительным.

В силу специфики образования ДК в ней, в отличие от случая двухлучевой интерференции, нельзя рассматривать контраст по полю и в точке, а можно

использовать только интегральную оценку качества ДК. В качестве такой оценки можно использовать амплитуды частот Фурье-спектра выровненной ДК. Фурье-спектр выровненной ДК имеет линейчатую структуру. В нем можно выделить нулевую гармонику и гармонику, соответствующую основному пространственному периоду ДК.

Для оценки величины контраста воспользуемся отношением амплитуд гармоник. Для невозмущенной выровненной ДК, имеющей вид гармонической составляющей умноженной на прямоугольный импульс, амплитуда нулевой гармоники Фурье-спектра в два раза превосходит амплитуду гармоники, соответствующую основному пространственному периоду. Для сохранения общепринятого диапазона изменения величины контраста в интерференционной картине введем множитель, равный двум. Тогда величина контраста будет равна  $V = \frac{2I_1}{I_0}$ , где  $I_0$  и  $I_1$ , соответственно амплитуды модуля

Фурье-спектра нулевой и основной гармоник Фурье-спектра выровненной ДК (см. рис. 4.1).

Сопоставим величину контраста, получаемую по предлагаемому способу и контраст интерференционной картины в интерферометре Юнга. В интерферометре Юнга степень когерентности поля излучения оценивают по контрасту интерференционной картины, который, как правило, определяют в точке поля. Если интенсивности интерферирующих пучков равны, то степень когерентности поля излучения равна контрасту интерференционной картины

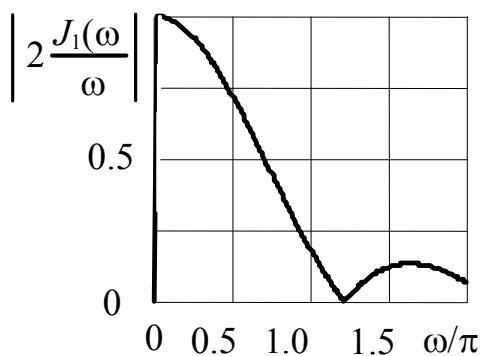


Рис. 4.2. Функция когерентности для источника круглой формы единичного радиуса

(рис. 4.2). Распределение интенсивности при дифракции частично когерентного излучения на двух круглых отверстиях радиуса  $a$

$$I(u) = 2 \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left( 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \cos(\beta_{12} - ud) \right)$$

где  $u = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi$ ,  $v = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{\rho}{R}$ ,  $\rho/R$  угловой размер источника излучения,  $d$  – расстояние между отверстиями,

$\beta_{12} = \arg \mu_{12}$ ,  $\mu_{12}$  – степень когерентности.

Преобразовав распределение интенсивности, получим:

$$I'(u) = 2 \left( 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \cos(\beta_{12} - ud) \right).$$

Выполним Фурье-преобразование выровненного распределения интенсивности

$$|S(\omega)| = \left| \int_0^{\omega_{zp}} I'(u) \exp(j\omega u) du \right|$$

и найдем отношение амплитуд гармоник модулей Фурье-спектра. Рассчитываемая таким способом величина контраста дифракционной картины зависит от числа анализируемых дифракционных порядков, число которых обычно определяется исходя из решаемой задачи. Но, как правило, их число не превышает десятка и с уменьшением характерного размера объекта уменьшается. Так, например, при наблюдении дифракции на эритроцитах обычно анализируют два - три дифракционных порядка.

При числе анализируемых дифракционных порядков 10 и более величина контраста, рассчитанная двумя способами, практически совпадает. С уменьшением числа анализируемых порядков рассчитываемая величина контраста незначительно уменьшается.

Величина контраста, рассчитанная двумя способами для пяти дифракционных порядков, отличается на  $0.02 \div 0.03$  единицы (Таблица 4.1) (рис. 4.3). При уменьшении степени когерентности эти различия незначительно увеличиваются. На практике, эта разница, как правило, лежит в пределах погрешности измерения.

**ТАБЛИЦА 4.1**

Контраст интерференционной картины дифрактометра Юнга, рассчитанный двумя способами

Способ расчета	Контраст			
	<i>Пространственная частота освещающего поля в соответствии с теоремой Ван Циттерта-Цернике для отверстия единичного радиуса</i>			
	0.25	0.5	0.75	1.0
Теоретическая величина контраста (степень когерентности освещающего поля)	0.93	0.72	0.45	0.18
Выровненный сигнал (пять дифракционных порядков)	0.88	0.68	0.41	0.20

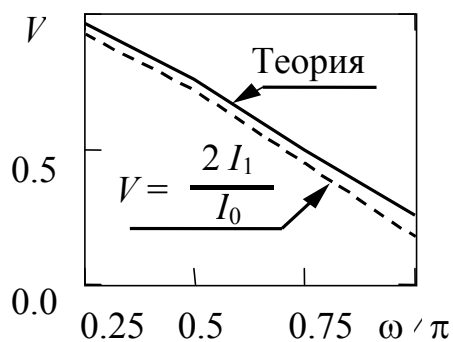


Рис.4.3. Зависимость контраста (степени когерентности) в интерферометре Юнга от расстояния между точками поля

Таким образом, преобразование распределения интенсивности ДК позволяет ввести понятие контраста ДК, как отношение амплитуд гармоник выровненного спектра. Численную величину контраста удобно использовать для количественной оценки качества ДК при наличии различного рода возмущений облучающего поля или при дисперсном характере объекта дифракции.

#### 4.5. Геометрическая теория дифракции

Геометрическая теория дифракции (ГТД) была предложена Келлером как обобщение результатов асимптотических разложений дифракционных интегралов. И хотя ГТД строится как асимптотическая теория, применяемая в тех случаях, когда характерный размер объекта  $a$  много больше длины волны  $\lambda$ , опыт расчетов по ГТД показывает, что она дает достоверные результаты вплоть до величин  $a$  порядка  $\lambda$ .

В ГТД наряду с отражением и преломлением, постулируются лучи, порождаемые лучами первичного поля, касающимися тела или попадающие на изломы поверхности тела (ребра, острия). Каждый луч первичного поля порождает бесконечное множество дифрагированных лучей.

При нормальном падении излучения на тонкую плоскую апертуру постулаты ГТД могут быть сформулированы следующим образом:

- угловые точки контура апертуры, порождающие дифракционные лучи во всех направлениях, являются источниками сферических волн;
- контур апертуры порождает краевую волну, угол раствора конуса ее лучей равен  $\pi/2$ . Для прямолинейного края волна является цилиндрической, а для криволинейного тороидальной.

Вторичными дифрагированными лучами обычно можно пренебречь, так как они возникают от лучей распространяющихся в плоскости апертуры, амплитуда которых мала.

Величина дифракционного поля в точке  $Q$  вычисляется как сумма дифракционных волн

$$U(x, y, z) = \sum_n U_n(x, y, z) \exp(iks_n).$$

Данное выражение представляет собой сумму дифракционных полей, соответствующих каждому из дифракционных лучей, пришедших в точку  $Q$ ;

$s_n$  – эйконал вдоль  $n$ -го луча.  $U_n(x,y,z)$  – комплексный амплитудный коэффициент, называемый также коэффициентом дифракции. Его физический смысл – “сила” некоего виртуального источника света, расположенного в точке выхода луча.

Таким образом, алгоритм решения дифракционной задачи по ГТД сводится к определению положения постулированных источников дифракционных волн и последующему сложению комплексных амплитуд этих волн в точке наблюдения. Фактически это означает, что дифракционная задача сводится к интерференционной и формула для интенсивности  $I(Q) = U(Q) \cdot U^*(Q)$  совпадает с интерференционной формулой Юнга

$$I(Q) = \sum_n I_n(Q) + 2 \sum_{n \neq m} \sqrt{I_{m,n}(Q) I_{m,n}(Q)} \cos(\Delta_{m,n} + \delta_{m,n}) \quad (1.3)$$

Здесь  $\Delta_{m,n}$  – разность фаз для волн источников  $m$  и  $n$ , обусловленная геометрической разностью хода;  $\Delta_{m,n} = k(s_m - s_n)$ ;  $\delta_{m,n}$  – начальный относительный фазовый сдвиг интерферирующих волн;  $k = 2\pi/\lambda$ . Амплитуды дифрагированных волн и относительные фазовые сдвиги в рамках ГТД не определяются; для их нахождения необходимо использовать данные, полученные из более общей теории.

Рассмотрим модель формирования ДК по ГТД. Для зоны дифракции Фраунгофера достаточно рассмотреть интерференцию дифракционных лучей, идущих в одном направлении (рис. 4.4).

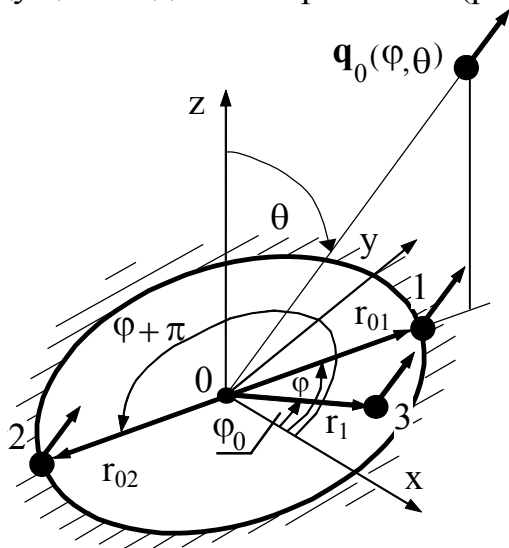


Рис. 4.4. Схема источников излучения для ГТД модели

Воспользуемся сферической системой координат. Зададим направление наблюдения вектором  $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ . Координаты точек выхода лучей, дифрагированных в заданном направлении будем задавать радиус векторами. Угловые точки контура всегда являются точками выхода лучей. Для прямолинейных участков контура в ГТД как точек выхода лучей постулируется точка, соответствующая середине участка контура.

На криволинейных участках контура точки выхода лучей, оказываются “подвижными” – их положение зависит от направления наблюдения. Число точек выхода лучей, участвующих в формировании дифракционного поля в

заданной точке, зависит от направления наблюдения.

Для дальней зоны задачу можно рассматривать как двумерную на плоскости с полярными координатами ( $\rho = k \sin \theta$ ;  $\varphi$ ), поскольку положение точек отрыва лучей, уходящих в заданном направлении, не зависит от  $\theta$ . Таким образом, в модели ГТД мы приходим к задаче на плоскости. Такая постановка задачи

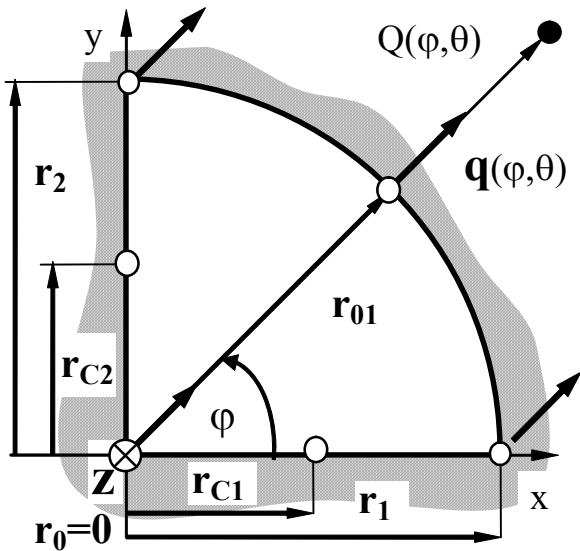


Рис. 4.5. Схема источников излучения для прямоугольного сектора.

делает ее более наглядной, позволяя ограничиться рассмотрением дифракционной задачи в плоскости апертюры. На плоскости модуль вектора  $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$  равен  $\sin \theta$ .

Рассмотрим формирование поля на примере апертюры в виде прямоугольного сектора (рис. 4.5). Координаты точек выхода лучей определим векторами  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{c1}, \mathbf{r}_{c2}$ .

Найдем проекции векторов, задающих координаты точек выхода лучей, на направление наблюдения, представляющие собой скалярные произведения соответствующего вектора точки выхода луча и вектора  $\mathbf{q}(\varphi, \theta)$ , т.е.

$$\begin{aligned}
 s_0 &= [\mathbf{r}_0 \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = 0 \\
 s_1 &= [\mathbf{r}_{01} \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = R \sin \theta ; \\
 s_1 &= [\mathbf{r}_{01} \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = R \sin \theta ; \\
 s_2 &= [\mathbf{r}_1 \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = R \cos \varphi \sin \theta ; \\
 s_3 &= [\mathbf{r}_2 \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = R \sin \varphi \sin \theta ; \\
 s_4 &= [\mathbf{r}_{c1} \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = (R / 2) \cos \varphi \sin \theta ; \\
 s_5 &= [\mathbf{r}_{c2} \mathbf{q}(\varphi, \theta)] = (R / 2) \sin \varphi \sin \theta ,
 \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус сектора.

В ГТД нас интересует сетка экстремумов поля дифракции, которая определяется разностями фаз интерферирующих волн  $\Delta_{m,n} = k(s_m - s_n)$ . Линии, вдоль которых разность фаз этих компонент постоянна, т.е. линий, где  $k(s_m - s_n) = \text{const}$  определяют структуру ДК.

Под термином «структура» будем понимать совокупность зон ДК, в каждой из которых дифракционное поле формируется взаимной интерференцией характерного набора дифракционных волн. Данный набор можно классифицировать по следующим признакам: типу дифрагированных волн (определяется согласно форме волнового фронта и уровню амплитуды) и количеству волн.

Как уже было отмечено, выделяется три типа дифрагированных волн:

- *сферические* волны угловых точек;
- *тороидальные* волны криволинейных участков контура;

- **цилиндрические** волны прямолинейных участков контура.

В соответствии со спецификой образования они могут значительно отличаться друг от друга по амплитуде.

Их амплитуды могут быть **равными**, **сравнимыми** и **резко отличающимися** друг от друга. Волны равной амплитуды, как правило, относятся к одному типу, а отличающиеся по амплитуде - к разным.

Что касается количества интерферирующих волн, то данный признак необходимо рассматривать с учетом амплитуд волн.

Зону ДК будем классифицировать по волне, имеющей наибольшую амплитуду в данной области.

Для удобства обозначения дифракционных волн и их совокупности введем следующие обозначения:

– основную волну в данной зоне будем обозначать большой латинской буквой:  $C$  (Цилиндрическая волна),  $T$  (Тороидальная волна),  $S$  (Сферическая волна);

– волну, амплитуда которой меньше основной, но сравнима с ней, будем обозначать малой латинской буквой:  $c$ ,  $t$ ,  $s$ ; соответственно типу волны;

– прочие волны, амплитуда которых много меньше основной, также будем обозначать малыми латинскими буквами  $c$ ,  $t$ ,  $s$ , заключая их в квадратные скобки  $[c]$ ,  $[t]$ ,  $[s]$ ;

– число волн с одинаковой амплитудой будем обозначать нижним индексом, например,  $C_2[s_4]$ .

Так как каждая из дифрагированных волн порождается соответствующим участком контура апертуры, то информация о числе и типе образующих контур линий, а также наличии угловых точек, содержащаяся в шифрах зон ДК, позволяет определить общую структуру ДК:

– прямолинейному краю длиной  $a$ , соответствует зона ДК в виде полосы шириной (по первому минимуму)  $4\pi z/ka$ , где  $z$  – расстояние до плоскости наблюдения;

– участку кривой соответствует зона ДК в виде двух противолежащих секторов, угол при вершине которых равен максимальному углу между нормальными к данному участку;

– угловая точка оказывает влияние на всю плоскость ДК.

Асимптотическое рассмотрение дифракционного интеграла в приближении Френеля показывает, что дифракционное поле за экраном с отверстием может быть разделено на светлую область, в которой дифракционное поле сравнимо с падающим полем, переходную область и темную область.



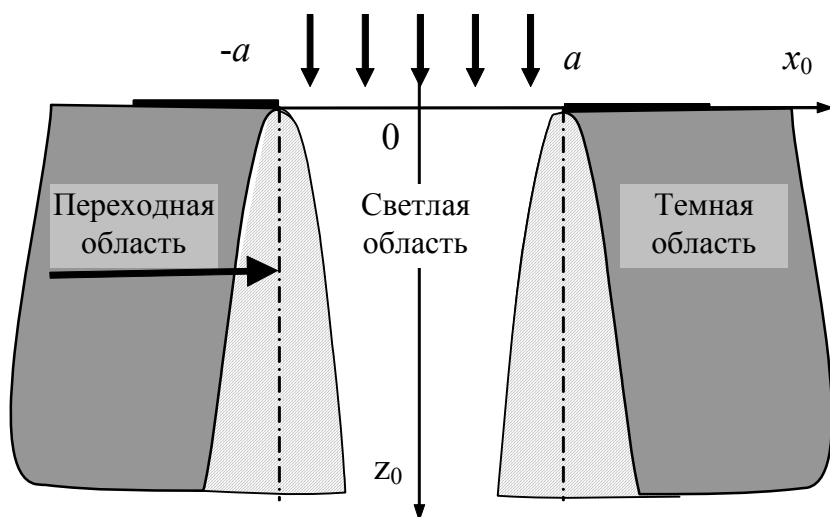


Рис. 4.6. Схема дифракции в зоне Френеля

Эти области ограничены параболой  $(a \pm x_0)^2 = 4\lambda z_0$  (рис. 4.6). Таким образом для плоской фигуры зоны неприменимости ГТД имеют вид полос, совпадающих с переходными зонами свет-тень краевых волн. В дальней зоне дифракции зоны неприменимости ГТД пересекаются в центре ДК, перекрывая зону прошедшего излучения – центральное пятно ДК. На формирование центрального пятна ДК оказывает влияние низкочастотные компоненты, а ГТД основана на высокочастотной асимптотике дифракционного поля. Согласно анализу низкочастотных компонент дифракционного поля форма центрального пятна ДК формально повторяет развернутый на  $90^\circ$  моментный эллипс плоской фигуры для соответствующей апертуры.

Кроме центра ДК ГТД не применима и в других зонах. Зоны неприменимости ГТД имеют вид полос, ориентированных вдоль касательных к контуру апертуры в окрестности угловых точек. Данные зоны совпадают с зонами влияния цилиндрических волн.

Все вышесказанное позволяет сделать описание характерных зон ДК Фраунгофера в приближении ГТД. В центре - яркое пятно, имеющее форму моментного эллипса апертуры, повернутого на  $90^\circ$ . Прямолинейным участкам контура апертуры в ДК соответствуют относительно узкие яркие полосы, ориентированные нормально соответствующему участку. Криволинейным участкам соответствуют более темные зоны ДК, ориентированные в направлении оси сектора. Между данными зонами ДК поле формируется слабым излучением угловых точек, поэтому средняя интенсивность здесь самая низкая. Зоны действия различных дифракционных волн могут перекрываться, и из-за процесса интерференции распределение интенсивности не будет однородным, но принцип выделения характерных зон сохраняется.

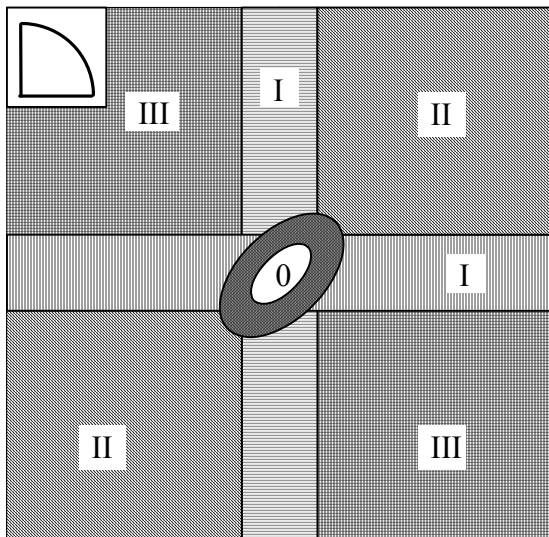


Рис. 4.7. Зоны дифракционной картины. 0 – моментный эллипс; I – зона цилиндрических волн; II – зона тороидальных волн; III – зона волн точечных источников

Это можно проиллюстрировать на примере апертуры в форме прямоугольного сектора (рис. 4.7). Контур апертуры содержит два прямолинейных и один криволинейный участок - дугу окружности, и три угловые точки. Зона I область действия цилиндрических волн - две узкие полосы, лежащие вдоль осей координат. Зона II область действия тороидальной волны дуги в 1-й и 3-й четверти. Таким образом, 2-я и 4-я четверти – зона III, практически свободны от влияния краевых волн, и ДК здесь формируется только волнами угловых точек. Нулевая зона - область существования моментного эллипса. Структура модуляции ДК, обусловленная взаимной интерференцией дифрагированных волн, достаточно сложна.

## **5. Квантовая природа электромагнитного излучения. Ограничение разрешающей способности оптической системы и информационной емкости оптических сигналов**

### **5.1 Квантовая природа электромагнитного излучения**

Долгое время человечеству была известна только одна форма электромагнитного излучения – видимый свет. Исторически первым научным представлением о свете являлась корпускулярная теория, получившая законченный вид в работах И. Ньютона (конец XVII в). В рамках корпускулярной теории свет рассматривался как поток малых материальных частиц – корпускул, движущихся в пустоте прямолинейно и равномерно со скоростью света, и замедляющихся в оптически плотных средах пропорционально их коэффициенту преломления. Подобное представление давало объяснение уже известным законам геометрической оптики и дисперсии, и тем самым позволило создать достаточно эффективную на первых порах теорию конструирования оптических приборов.

Но открытие явлений интерференции и дифракции, а также такого фундаментального свойства света, как поляризация, в начале XIX века заставило научное сообщество радикально пересмотреть представление о свете – была воскрешена гипотеза Х. Гюйгенса, современника И. Ньютона, согласно которой свет представляет собой распространяющиеся механические колебания – волны - некой сплошной упругой среды, заполняющей все мировое пространство – светового эфира. На базе волновой гипотезы Т. Юнг объяснил явление интерференции; О. Френель создал эффективную теорию дифракции и вывел соотношения для отражения и преломления света на границе раздела оптических сред; Гаусс, Аббе, Зейдель и другие завершили классическую теорию оптических приборов. Последующее открытие электродинамики Максвелла и отождествление света с электромагнитными волнами, как тогда казалось, окончательно утвердило представление о свете как сугубо волновом процессе.

Однако никак не удавалось объяснить ряд явлений – отсутствие «эфирного ветра» в интерференционных экспериментах, характер излучения абсолютно черного тела и законы фотоэффекта. Разрешить проблему удалось А. Эйнштейну и М. Планку – так появились теория относительности и гипотеза квантов. Согласно теории относительности, процесс распространения электромагнитного поля это не вовлечение в колебательный процесс стационарной упругой среды – эфира, но реальное распространение в пространстве материи особого рода. Фундаментальное свойство любой материи – масса, и при распространении поля перенос энергии и массы неразрывно связаны. Исследования же процессов излучения и поглощения показали, что энергия и масса поля передается и распространяется дискретными порциями – квантами, причем кванты излучения демонстрировали свойства неделимости и пространственной локализации, подобно малым материальным частицам. Эти частицы были названы фотонами, от греческого слова  $\phi\omicron\tau\omicron\varsigma$  – свет. Но, если

вновь принять корпускулярную теорию, как же тогда интерпретировать многочисленные явления, в которых очевидна волновая природа излучения?

В 1925 году Л. де Бройль выдвинул радикальную гипотезу о волновой природе не только излучения, но любой материи, согласно которой на уровне атомных масштабов необходимо отказаться от представления о микрочастицах, элементарной формой материи являются поля, которые, распространяясь в форме волновых пакетов, в определенных условиях эксперимента способны демонстрировать корпускулярные свойства. В начале гипотеза казалась весьма перспективной, с ее помощью удалось объяснить основные результаты проведенных в то же время новых опытов, в которых была обнаружена интерференция и дифракция электронов. Но более детальный анализ показал, что волновые пакеты де Бройля не обладают свойствами неделимости и локальности, неизменно присущими частицам в любых подобных экспериментах. Такое «странное», «необъяснимое» и «алогичное» поведение микрочастиц привело научное сообщество в конце 20-х годов XX века к осознанию того, что выхода из тупика не существует в рамках системы представлений и образов классической физики. Была создана новая физика – квантовая.

Принципиальное отличие квантовой физики от физики классической – наличие двух уровней теоретического представления реальности – *формализма* и *интерпретации*. Формализм – это собственно математический аппарат теории и алгоритм его применения. Интерпретация же обеспечивает связь между математикой формализма и физическим миром. Эта связь делает возможной проверку формализма путем сопоставления его предсказаний с результатами экспериментов. Без какой-либо интерпретации символов формализма в терминах, которые могут быть соотнесены с экспериментально наблюдаемыми величинами, формализм остается абстрактной математикой без физического контекста.

В классической механике, применительно к задаче движения материальной частицы, современный формализм выглядит следующим образом. Сначала определяется *функция Гамильтона*  $H$ , которая является выражением для полной энергии частицы в зависимости от ее координат  $\vec{q} = (x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$  и импульса  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$ . Обычно функция Гамильтона представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии частицы. Например, в случае движения частицы под действием силы тяжести:

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + mg(z - z_0),$$
 при движении частицы с зарядом  $e$  в электрическом

поле с потенциалом  $U$ : 
$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + e \cdot U(\vec{q}).$$
 Далее, записываются *уравнения движения*, являющиеся, по сути, формулировкой 2-го и 3-го законов Ньютона:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = m \frac{d^2 q_k}{dt^2}; \quad k = 1, 2, 3$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1,2,3} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{dp_k}{dt} \right) = 0.$$

Если дополнить эти дифференциальные уравнения начальными или граничными условиями, то полученные частные решения – векторные функции времени  $\vec{q}(t)$ , описывают геометрическое место точек центра масс исследуемой частицы, и называются ее *траекториями*. Дифференцируя траекторию по времени и умножая на массу, можно легко получить также и значения импульса частицы в любой момент времени, далее с помощью известных формул – мгновенные значения кинетической и потенциальной энергий частицы. Тем самым, в классической механике из факта наличия определенной траектории однозначно следует, что имеется и вся остальная информация о параметрах движения частицы. Кроме того, имеется возможность записывать функцию Гамильтона не только как зависимость от координат и импульса, но и как зависимость от любой другой пары переменных, лишь бы они удовлетворяли уравнениям движения. Такие пары переменных называются *канонически сопряженными*. Например, при исследовании вращательного (орбитального) движения удобнее пользоваться канонической парой *азимут* и *момент*.

Формализм квантовой механики существенно отличается от изложенного только что классического. В первую очередь, в нем отсутствуют *функции*, описывающие интуитивно-очевидные физические свойства и параметры частицы – координату, скорость, импульс, энергию и т.п. Вместо них вводятся *операторы*, воздействующие на особую комплексную *функцию состояния*, или *пси-функцию*, зависящую от координат и времени:  $\Psi(\vec{q}, t)$ . Операторы бывают типа умножения, например, *оператор координаты*  $\hat{x}\Psi = x \cdot \Psi$  и *потенциальной энергии*  $\hat{U}\Psi = U(\vec{q}) \cdot \Psi$ ; дифференциального типа, например, *оператор импульса*  $\hat{p}_x \Psi = -i\eta \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ; и смешанного типа – *оператор полной энергии* (*оператор Гамильтона, или Гамильтониан*):  $\hat{H}\Psi = -\frac{\eta^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi$ .

Основным уравнением, вместо уравнений движения, является *уравнение Шредингера*:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\eta^2}{2m} \Delta \Psi + U \cdot \Psi = i\eta \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Неизвестной функцией здесь является функция состояния  $\Psi$ , логически занимающая место траектории в классической механике. Но, если в

классической механике сама траектория и получаемые из нее прочие величины уже являются интуитивно-понятными, базовыми физическими параметрами и характеристиками движения, то результат применения квантового формализма – функция состояния, нуждается в дополнительной интерпретации, связывающей ее с реальными наблюдаемыми физическими величинами.

Первоначально создатель данного формализма Э. Шредингер предполагал, что функции состояния описывают волны плотности материи, подобно волновым пакетам де Бройля, но такая интерпретация также оказалась несостоятельной по тем же причинам – нарушался принцип локальности частиц. В конце концов, трудом многих ученых адекватная интерпретация была создана, но ценой отказа от интуитивных концепций физики микромира и пересмотра всего философского представления человечества о материи и физической реальности.

Основных положений интерпретации квантовой механики существует три: *статистическая интерпретация функции состояния* (М. Борн, 1926); *принцип неопределенности* (В. Гейзенберг, 1927); *принцип дополненности* (Н. Бор, 1928).

Согласно статистической интерпретации Борна, функция состояния (а точнее, квадрат ее модуля) описывает не распределение плотности массы частицы в пространстве, а *распределение плотности вероятности* нахождения частицы в данной точке пространства в данный момент времени. Тем самым снимается проблема нелокальности, свойственная ранним интерпретациям де Бройля и Шредингера. Соответственно, идея о волнах материи отвергается, и квантовая частица объявляется корпускулой, но принципиально отличной от классической корпускулы в ньютоновском смысле, а именно – *квантовая частица не имеет траектории*. Ее «движение» имеет вероятностный, статистический характер не из-за отсутствия начальной информации о параметрах, но является фундаментальным свойством, потому сам термин «движение» применительно к квантовой частице применяется условно и взят в кавычки, так как из-за отсутствия определенной траектории классическое определение данного термина теряет смысл. Соответственно, после решения уравнения Шредингера и нахождения функции состояния, вместо утверждения, что «частица в момент времени  $t$  находится в точке  $q$ », привычного в классической механике, утверждается, что «в момент  $t$  существует вероятность обнаружить частицу в объеме  $V$ , равная:

$$P(t) = \int_V \Psi^*(q,t) \Psi(q,t) dq.$$

Соответственно, прочие наблюдаемые физические величины, относящиеся к частице, также имеют смысл статистически-усредненных. Так, чтобы вычислить среднее по объему для некой физической величины  $A$ , нужно рассчитать интеграл:

$$\langle A \rangle(t) = \int_V \Psi^*(\vec{q}, t) \hat{A} \Psi(\vec{q}, t) d\vec{q},$$

где  $\hat{A}$  - оператор, сопоставляемый данной величине в формализме квантовой механики.

Принцип неопределенности Гейзенберга устанавливает особую роль канонически-сопряженных величин. В классической механике, как уже было сказано выше, наличие точно определенной траектории частицы позволяет столь же точно определить все параметры ее движения и связанные с ними физические величины. В квантовой же механике утверждается, что для каждой канонически сопряженной пары величин погрешности их определения, как экспериментального, так и теоретического, не являются произвольными, а подчиняются соотношению:

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq \text{const}.$$

Практически значимые варианты этого соотношения связывают координату и импульс частицы:  $\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ ; полную энергию системы и время ее измерения:  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ ; и, в квантовой оптике, число фотонов в системе  $n$  и фазу  $\Phi$  соответствующей им волны:  $\Delta n \cdot \Delta \Phi \geq 2\pi$ .

Принцип дополнительности Бора подводит общую базу под известные свойства квантовой частицы – отсутствие траектории, невозможность точного измерения канонически сопряженных величин и одновременную демонстрацию корпускулярных и волновых свойств. Все это является следствием того факта, что, во-первых, любой натуральный эксперимент или его теоретическое моделирование предусматривает наличие макроскопических, «классических» объектов – измерительной аппаратуры и наблюдателя, которые так или иначе физически взаимодействуют с объектом наблюдения. В классической физике энергия этого взаимодействия считается пренебрежимо малой и не влияющей на результат эксперимента. В микромире же энергия процесса взаимодействия аппаратуры и объекта может многократно превышать энергию изучаемых процессов. Этим и объясняется принципиальная неопределенность и вероятностный характер квантовых процессов для макроскопических наблюдателей, поскольку измерительная процедура, нацеленная на определение какой-либо величины, вследствие взаимодействия с объектом наблюдения неминуемо изменит сам объект и «испортит» его прочие параметры, сделав невозможным их точное определение одновременно с основной величиной. Корпускулярно-волновой дуализм имеет ту же природу. Квантовые объекты, которые по своей сути не являются ни корпускулами, ни волнами, будучи вовлечены в определенную экспериментальную схему, на макроскопическом уровне демонстрируют свойства макрообъектов - «корпускул» или «волн», в соотношении, определенными условиями

эксперимента. Причем корпускулярные и волновые свойства находятся в отношении «дополнения» друг к другу (отсюда и название принципа), то есть, чем в большей степени демонстрируются волновые свойства, тем меньше корпускулярные, и наоборот.

В квантовой электродинамике и оптике этот принцип применяется следующим образом. Поскольку число фотонов в системе  $n$  и фаза  $\Phi$  соответствующей им волны являются сопряженными величинами и связаны соотношением неопределенности  $\Delta n \cdot \Delta \Phi \geq 2\pi$ , то если в эксперименте или теоретическом анализе точно фиксируется число фотонов, фаза оказывается неопределенной и волновые представления об электромагнитном поле неприменимы. Обычно это актуально, когда само число фотонов относительно невелико. В большинстве же обычных задач оптики число  $n$  принимающих участие в наблюдаемом процессе фотонов огромно, и, соответственно, весьма велико и его среднее отклонение  $\Delta n$ . В этом случае фаза вполне определена, и поле можно рассматривать как волну.

## 5.2 Принцип неопределенности в теории оптического сигнала и теорема Котельникова

Наблюдаемые физические процессы в оптике часто отождествляются с аналитическими сигналами, что позволяет применять для их описания и анализа развитый математический аппарат теории сигналов. В рамках этой теории принцип неопределенности приобретает смысл закономерности, связывающей локализации сигнала в координатном и частотном пространствах.

Пусть  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  - зависящие от времени комплексные сигналы. Для них справедливо неравенство Шварца:

$$|(s_1, s_2)|^2 \leq (s_1, s_1)(s_2, s_2)$$

С учетом определения скалярного произведения сигналов неравенство Шварца можно записать:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (s_1^* \cdot s_2 + s_2^* \cdot s_1) dt \right|^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |s_1|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |s_2|^2 dt$$

Пусть  $s_1(t) = t \cdot s(t)$  и  $s_2(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ . В этом случае:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[ ts^* \frac{ds}{dt} + ts \frac{ds^*}{dt} \right] dt \right|^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |ts|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt$$



Левая часть неравенства, в случае  $t \cdot |s(t)| \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$ , что справедливо для реальных физических сигналов, равна квадрату энергии сигнала:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t \left[ s^* \frac{ds}{dt} + s \frac{ds^*}{dt} \right] dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} t \left[ \frac{d|s|^2}{dt} \right] dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |s|^2 dt \right|^2 = E^2$$

$$\text{Таким образом: } E^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |ts|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt$$

Если  $s(\omega)$  - спектральная плотность сигнала  $s(t)$ , то  $\frac{ds}{dt} \xrightarrow{F} i\omega \cdot s(\omega)$  и

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| \xrightarrow{F} \omega^2 \cdot |s(\omega)|^2. \quad \text{Согласно равенству Парсеваля:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega, \text{ и неравенство примет вид:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} E^2$$

Протяженности сигнала во временном и частотном пространствах, по определению:

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt \quad (\Delta \omega)^2 = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega$$

Подставляя в неравенство и извлекая квадратный корень, получим соотношение неопределенности для сигнала в окончательном виде:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

Если речь идет об оптическом сигнале, то умножением неравенства (4.1) на постоянную Планка  $\eta$  получается классическое соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \eta/2$ , так как  $\Delta E = \eta \Delta \omega$ .

Если же одновременно умножить и поделить (5.1) на фазовую скорость света  $v = c/n$ , то получится:  $v\Delta t \cdot \frac{\Delta\omega}{v} \geq \frac{1}{2}$ . Так как  $v\Delta t = \Delta x$  и  $\frac{\Delta\omega}{v} = \Delta k$ , то получается другая классическая форма соотношения неопределенности для координаты и импульса фотона:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \text{ или } \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\eta}{2}.$$

В случае пространственного двумерного оптического сигнала  $s(x, y)$ , спектр которого  $s(u, v)$  и энергия  $E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(x, y)|^2 dx dy$ , аналогично с помощью неравенства Шварца выводятся соотношения:  $\Delta x \cdot \Delta u \geq \frac{1}{2}$  и  $\Delta y \cdot \Delta v \geq \frac{1}{2}$ . Перемножая их, получаем общее соотношение:  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \geq \frac{1}{4}$ . Если же сигнал зависит также и от времени:  $s(x, y; t)$ , то его спектр зависит от частоты:  $s(u, v; \omega)$ , и соответственно, полное соотношение неопределенности:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{8}.$$

При необходимости учета состояния поляризации сигнала, которая имеет две ортогональные составляющие, левая часть соотношения умножается на 2:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{4}.$$

Особую важность данные соотношения приобретают в связи с задачей о передаче и преобразовании информации, носителем которой выступает сигнал с ограниченным спектром. Центральное место в теории подобных сигналов занимает следующая теорема (в формулировке Котельникова): сигнал  $s(t)$ , спектр которого  $s(\omega)$  ограничен частотами  $\pm\Omega$ , может быть восстановлен полностью и без искажений по известным дискретным отсчетам данного сигнала  $s(t_n)$ , взятым во временных точках  $t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$ , расположенных через равные интервалы времени  $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$ , то есть, может быть представлен в виде ряда:

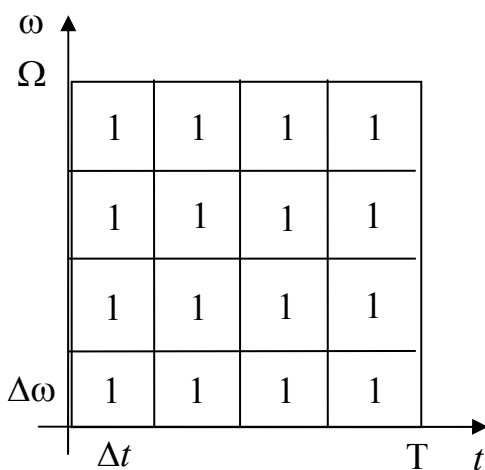
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\Delta t} \cdot s(t_n) \cdot \frac{\sin[\Omega(t - t_n)]}{\Omega(t - t_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \cdot s\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \cdot \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$$

На практике частота  $1/\Delta t$  обычно называется *частотой дискретизации* сигнала, а круговая частота  $\nu_{\max} = \Omega/2\pi$  - *несущей частотой*. Таким образом,

частота дискретизации оказывается равна  $2\nu_{\max}$ , т.е. удвоенной несущей частоте.

Если отождествить протяженности сигнала во временном и частотном пространстве, входящие в соотношение неопределенности (5.1), с интервалом и частотой дискретизации, входящими в формулировку теоремы Котельникова, то можно сформулировать принципиально важное понятие *информационной емкости* спектрально-ограниченного сигнала.

Спектрально-ограниченный сигнал можно представить графически в виде *области существования* – прямоугольника на плоскости  $\omega t$ , ограниченного предельной частотой  $\Omega$  и временем  $T$  (возможен вариант  $T \rightarrow \infty$  или  $\Omega \rightarrow \infty$ )



(рис. 5.1). Данный прямоугольник разбивается на элементарные ячейки, площадь которых  $\Delta t \Delta \omega$ , в соответствии с соотношением неопределенности, не может быть меньше  $1/2$ . В соответствии с теоремой Котельникова и из соображения удобства, принято разбивать область существования сигнала на ячейки единичной площади:  $\Delta t \Delta \omega = 1$  (*ячейки Габора*). По определению, *информационная емкость*, или *число информационных степеней свободы* сигнала  $N$  равно числу элементарных ячеек в его области существования плюс единица:

Рис. 5.1 Область существования сигнала с ограниченным спектром

$$N = n_{\omega} n_t + 1 = \frac{\Omega}{\Delta \omega} \cdot \frac{T}{\Delta t} + 1 = \Omega T + 1$$

Для пространственного оптического сигнала – область существования представляет собой шестимерный параллелепипед, но принцип разбиения на элементарные ячейки и подсчета информационной емкости такой же, как и для чисто временного сигнала: площадь ячейки равна  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega = 1$ , и число степеней свободы:

$$N = n_x n_{\xi} n_y n_{\eta} n_{\omega} n_t + 1, \text{ или, с учетом поляризации, } N = 2 \cdot n_x n_{\xi} n_y n_{\eta} n_{\omega} n_t + 1.$$

Таким образом, соотношение неопределенности, утверждающее, что частота и интервал дискретизации сигнала не могут быть одновременно сколь угодно малыми, накладывает физическое ограничение на информационную емкость сигнала.

### 5.3 Разрешающая сила оптической системы в классическом рассмотрении

В классической оптике, минимальный размер изображения точечного источника для идеальной оптической системы впервые был теоретически

определен Эйри в 1834 году с помощью волнового представления о свете в рамках теории Гюйгенса-Френеля.

Физически минимальный размер изображения определяется процессом дифракции на входной апертуре (входном зрачке) оптической системы. В простейшем случае, когда источник является бесконечно удаленным и монохроматическим, а оптическая система представляет собой единственную идеальную тонкую положительную линзу (рис. 5.2), то в ее фокальной плоскости будет наблюдаться распределение интенсивности излучения, диктуемое дифракционными формулами Фраунгофера, вид которых определяется формой ограничивающей апертуры:

$$I(\sin \theta) = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 - \text{ для щели; } I(\sin \theta) = I_0 \cdot \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 - \text{ для}$$

круга.

Здесь  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число,  $a$  - полуширина или радиус апертуры, угол  $\theta$  - *угол дифракции*. В последней формуле, называемой *формулой Эйри*,  $J_1$  - функция Бесселя первого рода первого порядка.

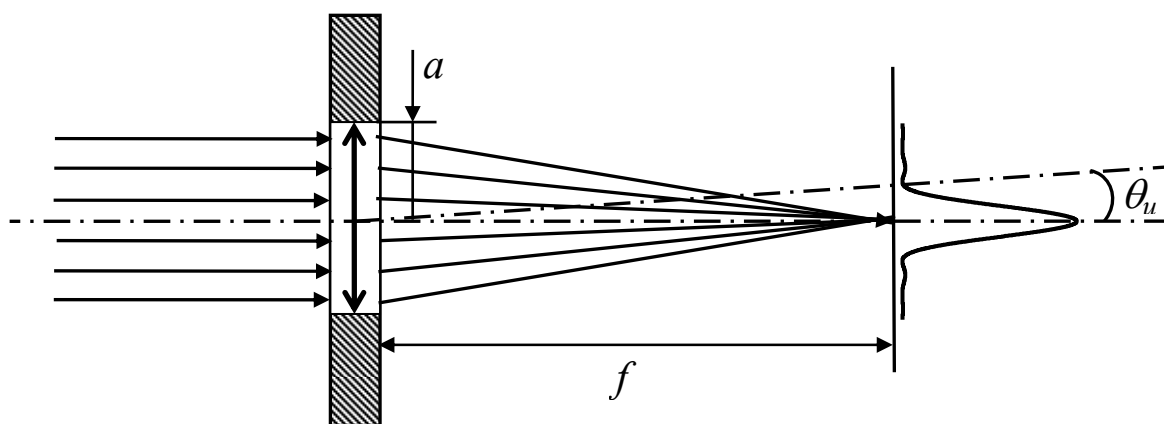


Рис. 5.2 Схема элементарной оптической системы (объектива)

Оба распределения интенсивности имеют схожий вид в сечении (рис. 5.3).

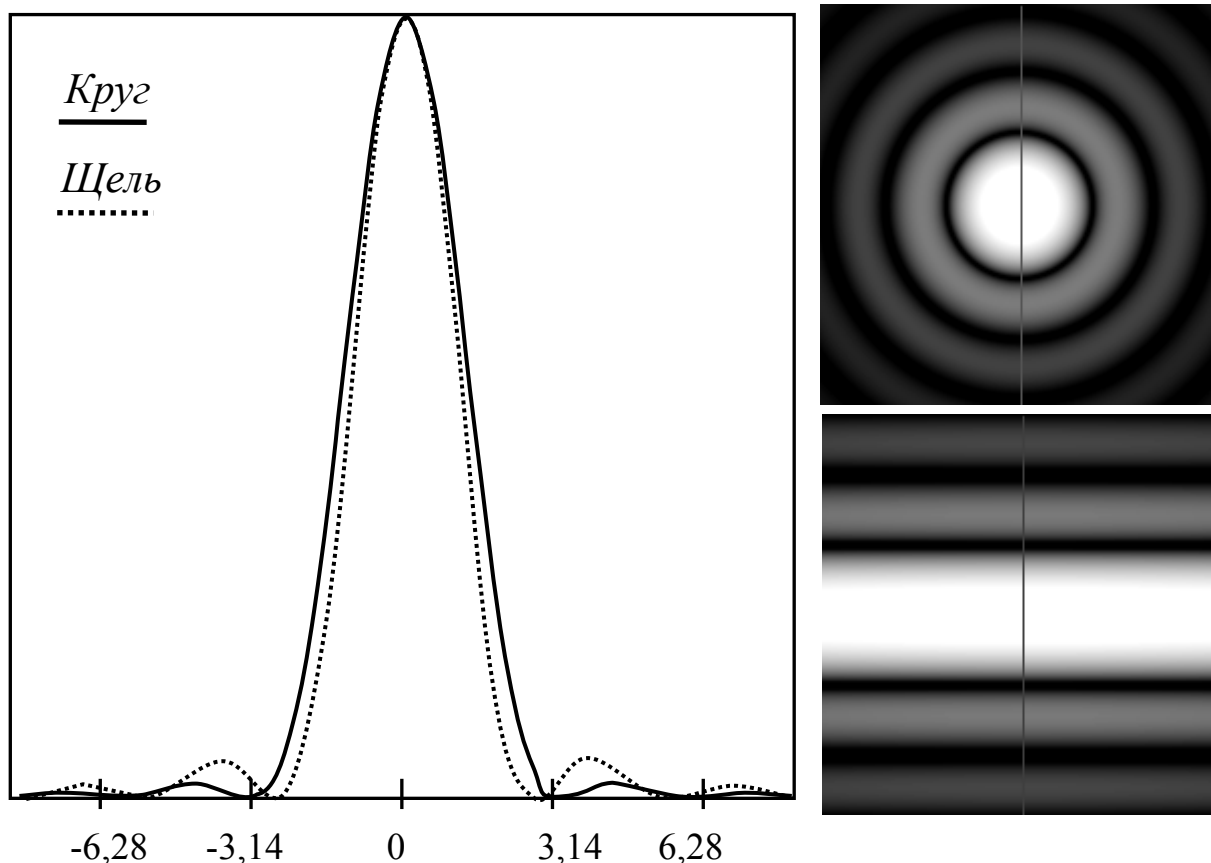


Рис. 5.3 Дифракционные распределения интенсивности для апертур в виде круга и щели

С изображением источника в классической оптике исторически принято отождествлять центральную часть данных распределений, т.е. нулевой дифракционный порядок – центральный кружок в случае круглой апертуры или центральную полосу для щели. Для оценки углового размера изображения  $\theta_u$  используются формулы, получаемые из формул Фраунгофера:

$$\theta_u \approx \frac{\lambda}{d} \text{ для щели; } \theta_u \approx 1.22 \frac{\lambda}{d} \text{ для круга,} \quad (5.2)$$

здесь  $d$  - ширина щели или диаметр апертуры, соответственно  $d = 2a$ . При малых углах дифракции  $\theta_u \approx \sin(\theta_u)$  и можно применять соответствующие оценочные формулы для линейных размеров изображения в фокальной плоскости:

$$L_u \approx f \frac{\lambda}{d} \text{ и } L_u \approx 1.22 f \frac{\lambda}{d}, \quad (5.3)$$

где  $f$  - фокусное расстояние линзы (объектива).

В случае наличия двух близкорасположенных точечных источников, излучение которых полностью не когерентно (например, двойная звезда), распределение интенсивности в фокальной плоскости изображающей системы будет являться простой суммой распределений интенсивности от каждого из источников (рис. 5.4).

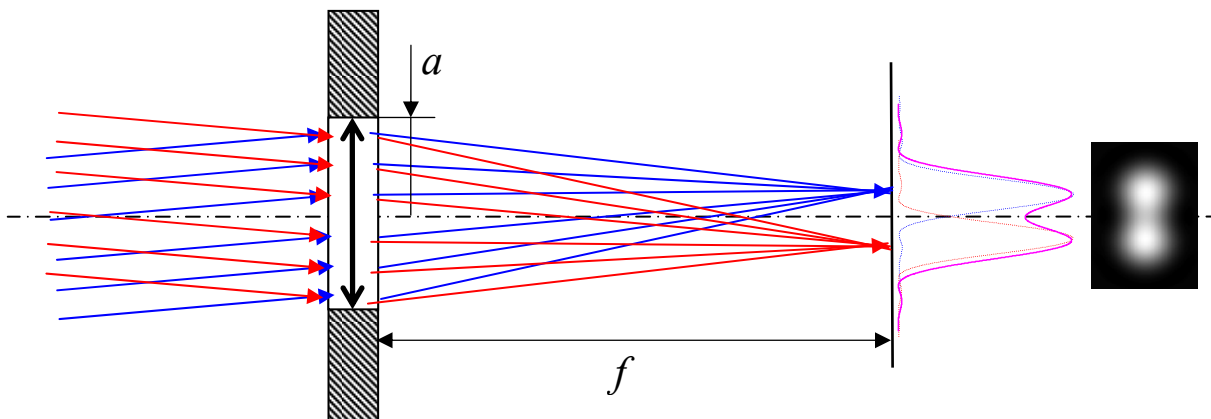


Рис. 5.4. Схема элементарной оптической системы (объектива) при наличии двух источников излучения

Принято считать, что оптическая система *разрешает* изображения источников, если величина интенсивности центрального минимума суммарного распределения не превышает уровня 0.85 от меньшего из соседних максимумов.

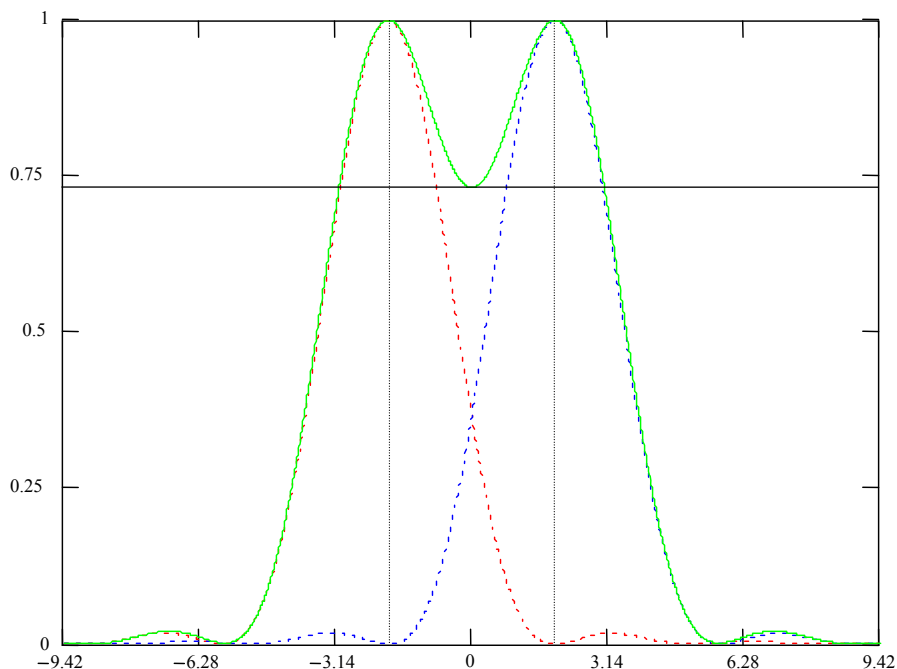


Рис. 5.5 Дифракционное распределение интенсивности в фокусе элементарной оптической системы (объектива) при наличии двух близкорасположенных некогерентных источников

Угловое расстояние между равными по яркости источниками, при котором достигается данное соотношение между соответствующими им дифракционными максимумами и минимумом суммарного распределения, является характеристикой оптической системы и называется ее *разрешающей способностью*. Также используется и более строгий критерий – изображения источников считаются разрешенными, если максимум одного распределения совпадает с первым минимумом другого (именно такая ситуация изображена на рис. 5.5), отношение интенсивности между минимумом и максимумами составляет в этом случае 0.74. Данный критерий удобен тем, что согласно нему, расстояние между максимумами оказывается равным размеру самих максимумов, так что для оценки разрешающей способности и минимального размера изображения можно пользоваться одними и теми же формулами (5.2) и (5.3).

В случае же когерентного (лазерная оптика) и частично-когерентного (микроскопия) излучения определение и критерии разрешающей способности будут существенно отличаться, в силу того, что дифракционное распределение от нескольких источников будет определяться уже не простым сложением независимых друг от друга действительных интенсивностей распределений от отдельных источников, но сложением комплексных амплитуд с учетом корреляционных отношений между ними.

#### **5.4 Квантовомеханическая модель дифракции плоской монохроматической волны на щели**

Рассмотрим схему эксперимента, аналогичную изображенной на рис. 5.2 в случае щели, но в отсутствии линзы.

С точки зрения квантовой механики, излучение удаленного точечного источника - плоская монохроматическая волна, представляет собой ансамбль фотонов, движущихся в направлении  $\theta_0$ , импульс которых определен и равен:

$$\mathbf{p} = (p, \theta_0), \quad p = mc = \frac{\eta\omega}{c} = \eta \frac{2\pi}{\lambda} = \eta k.$$

При этом физическая величина, канонически сопряженная с импульсом - координата - для каждого из фотонов полностью не определена и может иметь любое значение от плюс до минус бесконечности.

Поместим на пути фотонов экран, в котором имеется щель шириной  $2\Delta x$ . Часть фотонов будет задержана экраном, а часть пройдет сквозь щель. Этот процесс фактически можно интерпретировать как измерение координат той части фотонов, что прошла сквозь щель, так как факт прохождения фотонов означает, что они имели координаты в пределах  $x_0 \pm \Delta x$ , где  $x_0$  - положение середины щели. Любое измерение изменяет состояние системы, следовательно,

наличие информации относительно координат фотонов приводит к возникновению неопределенности их импульсов. Соотношение неопределенности в случае щели достаточно записать только для  $x$ -компоненты импульса:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \cdot p \cdot \Delta \sin \theta \approx \eta/2, \quad (5.4)$$

где  $\Delta \sin \theta$  - неопределенность синуса угла отклонения движения фотона от первоначального направления  $\theta_0$ , т.е., фактически неопределенность синуса угла дифракции. Выражение (5.4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta \sin \theta \cdot p &= \Delta x \cdot \Delta \sin \theta \cdot \eta k \approx \eta/2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta x &\approx \frac{\pi}{k \cdot \Delta \sin \theta}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Классическое выражение для распределения интенсивности дифракционного поля щели, как было сказано в предыдущем параграфе, описывается формулой Фраунгофера ( $\theta_0=0$ ):

$$I(\sin \theta) = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin(k\Delta x \sin \theta)}{k\Delta x \sin \theta} \right]^2.$$

Из (3) следует, что синусы направлений на первые минимумы равны:

$$\sin \theta_{\min 1} = \pm \frac{\pi}{k\Delta x}. \quad (5.6)$$

Сравнивая выражения (5.5) и (5.6), можно сделать вывод, что диапазон квантовомеханической неопределенности угла дифракции отождествляется с нулевым дифракционным порядком, заключенным между первыми минимумами распределения интенсивности, на который приходится около 80% энергии дифрагировавшего излучения.

К данному выводу можно прийти и другим путем, воспользовавшись свойством функции состояния, согласно которому она может быть выражена через любую из двух канонически сопряженных переменных – или через координату, или через импульс, причем между двумя представлениями существует взаимно-однозначное соответствие. В рассматриваемой задаче априори известен вид функции состояния в координатном представлении:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\Delta x}, & |x - x_0| \leq \Delta x \\ 0, & |x - x_0| > \Delta x \end{cases},$$

то есть, фотоны, прошедшие через щель, распределены по ее ширине по равновероятностному закону.



Для перехода к импульсному представлению, необходимо разложить функцию в координатном представлении в спектр по собственным функциям оператора импульса, являющимися решениями уравнения

$$-i\eta \frac{\partial \psi_p(x)}{\partial x} = p_x \cdot \psi_p(x). \text{ Эти функции с учетом нормировки имеют вид:}$$

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\left(\frac{ip_x x}{\eta}\right), \text{ а собственные числа } p_x \text{ образуют непрерывный спектр: } -\infty \leq p_x \leq +\infty.$$

Таким образом, искомое разложение:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(p_x) \exp\left(\frac{ip_x x}{\eta}\right) dp_x$$

- фактически представляет собой интеграл Фурье, и, окончательно, импульсное представление функции состояния:

$$\Psi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp\left(-\frac{ip_x x}{\eta}\right) dx$$

В данной задаче, подставляя в явном виде  $\Psi(x)$  и  $p_x = \eta k \sin \theta$  :

$$|\Psi|^2(\eta k \sin \theta) = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta\Delta x}} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(-ikx \sin \theta) dx \right|^2 = \frac{1}{\pi\eta\Delta x} \left[ \frac{\sin(k\Delta x \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]^2$$

- получаем для плотности вероятности распределения фотонов по углу дифракции классическую формулу Фраунгофера.

Таким образом, при большом количестве фотонов, они, в силу статистики, сформируют характерное дифракционное распределение интенсивности, выступая, согласно принципу дополненности, подобно обычному классическому волновому процессу.

При наличии нескольких некогерентных источников испускаемые ими ансамбли фотонов считаются независимыми и могут рассматриваться отдельно, также независимыми оказываются и плотности вероятности их распределений, аналогично дифракционным распределениям интенсивности для некогерентных источников в классической оптике. Когерентное и частично-когерентное излучение в квантовой оптике должно описываться с помощью единых ансамблей, соответственно постановки задач и их анализ существенно усложняются.

## 6. Корреляционные функции и когерентность излучения

### 6.1. Общетеоретические положения

**Когерентность излучения.** Понятие когерентности в оптике вводится для характеристики согласованности (корреляции) световых колебаний в различных точках пространства и в различные моменты времени. Определим степень когерентности посредством корреляционной функции светового поля. Рассмотрим поляризованное поле, вектор напряженности электрического поля  $E$  которого колеблется в определенном направлении. Если вектор напряженности оптического поля содержит компоненту, случайным образом изменяющуюся по пространственным координатам  $\mathbf{r}$  и по времени  $t$ , то можно построить следующую корреляционную функцию

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по всему пространству и по всему интервалу времени наблюдения. Для стационарных полей, статистические характеристики которых во времени не меняются,

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1).$$

Принято выделять также статистически однородные поля, для которых корреляционная функция зависит лишь от разности  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_1, t_2).$$

Однородное случайное поле называется изотропным, если корреляционная функция зависит лишь от абсолютного значения расстояния между двумя точками  $s = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Для стационарных во времени и однородных в пространстве случайных полей

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_2 - t_1) \equiv B(s, \tau),$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ . Корреляционная функция  $B(s, \tau)$  принимает максимальное значение при  $s = \tau = 0$ .

Введем применительно к световому пучку нормированную корреляционную функцию

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2, t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2, t_1)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2)}},$$

где  $I(\mathbf{r}_1, t_1)$  и  $I(\mathbf{r}_2, t_2)$  - интенсивности излучения в указанных пространственных точках и в указанные моменты времени. В случае стационарности поля светового пучка

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau = t_2 - t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1, t_1) I(\mathbf{r}_2, t_2)}}.$$

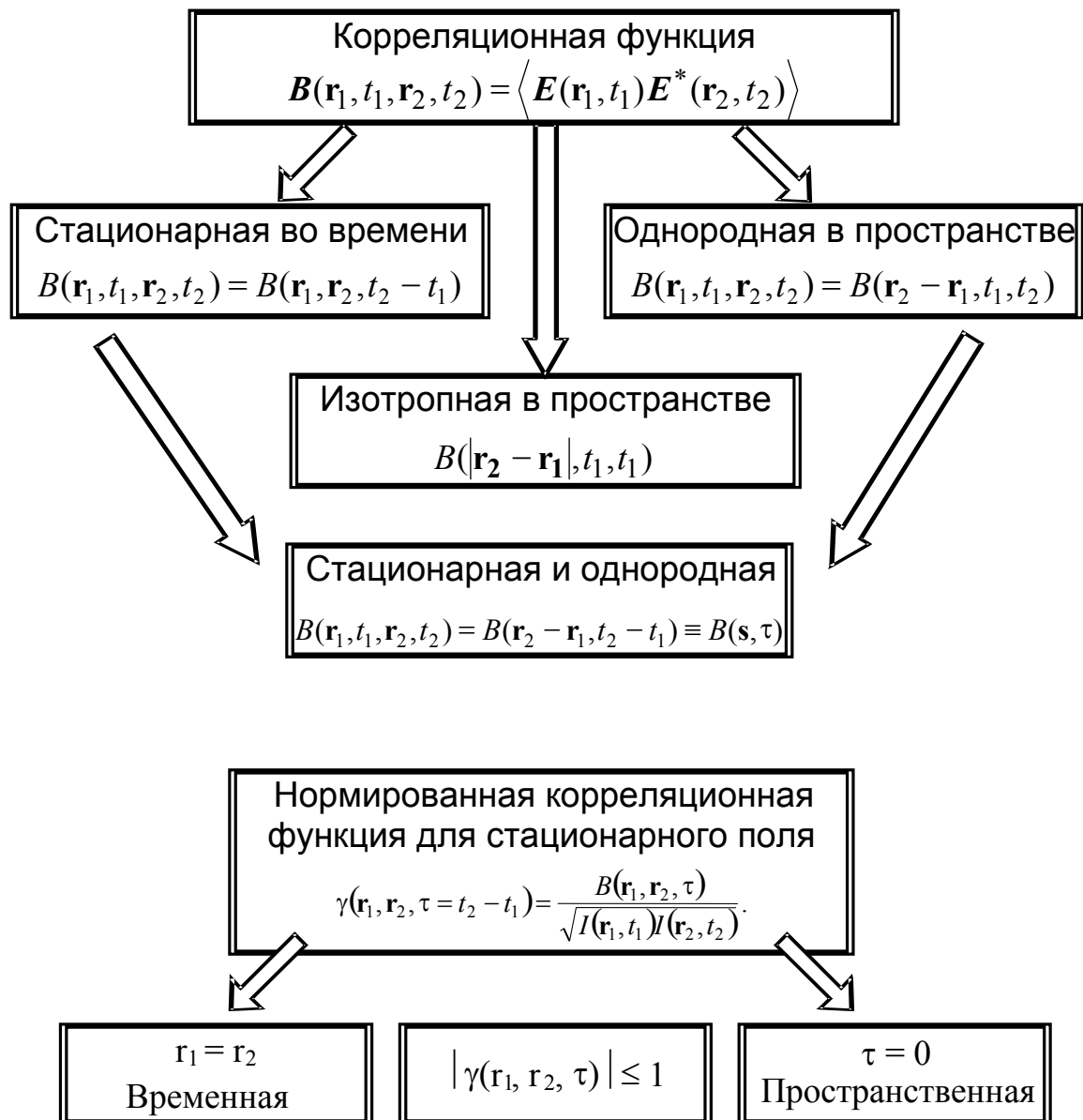


Рис. 6.1. Корреляционная функция. Свойства

Построенную таким образом величину  $\gamma$  называют комплексной степенью когерентности, так как корреляционные функции в общем случае комплексны. Абсолютную величину  $\gamma$  называют модулем степени когерентности или просто степенью когерентности. Степень когерентности всегда удовлетворяет неравенству

$$|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1.$$

$|\gamma|$  при  $\tau = 0$  дает значение степени пространственной когерентности, а при  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$  - значение степени временной когерентности. Значение  $s = s_k$  и  $\tau = \tau_k$ , при которых степень пространственной и временной когерентности уменьшаются в заданное число раз называются соответственно размером зоны когерентности и временем когерентности.

## 6.2. Распространение взаимной когерентности. Распространение световых волн, функция взаимной когерентности

Пусть  $u(P,t)$  - скалярная амплитуда одной компоненты поляризации электрического или магнитного поля, связанная с монохроматическим оптическим сигналом (излучением). В соответствии с принятым в скалярной теории подходом, рассмотрим каждую компоненту независимо. Здесь  $P$  - пространственная координата точки, а параметр  $t$  - момент времени. Аналитический сигнал, связанный с  $u(P,t)$ , имеет вид  $u(P,t) = U(P,\nu) \exp(-j2\pi\nu t)$ , где  $\nu$  - частота волны, а  $U(P,\nu)$  - амплитуда фазора.

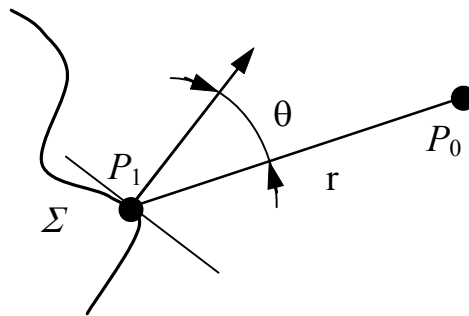


Рис. 6.2. Схема распространения излучения

Пусть волна падает слева на неограниченную поверхность. Необходимо найти амплитуду фазора поля в точке  $P_0$  справа от поверхности  $\Sigma$  через характеристики поля на поверхности  $\Sigma$ .

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля справедливо следующее решение

$$U(P_0, \nu) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1, \nu) \frac{\exp\left[j2\pi\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]}{r} \chi(\theta) ds,$$

где  $\lambda = c/\nu$  - длина волны излучения ( $c$  - скорость света);

$r$  - расстояние от точки  $P_1$  до точки  $P_0$ ;  $\theta$  - угол между прямой линией, соединяющей  $P_0$  и  $P_1$ , и нормалью к поверхности  $\Sigma$ ;

$\chi(\theta)$  - коэффициент наклона,  $\chi(0) = 1$  и  $0 \leq \chi(\theta) \leq 1$ .

Как правило, рассмотрение большинства задач ведется в приближении малых углов наклона и поэтому в дальнейшем, мы будем считать этот множитель равным единице.

Принцип Гюйгенса-Френеля можно интерпретировать таким образом. Каждая точка на поверхности  $\Sigma$  действует как новый вторичный источник сферических волн. Напряженность поля вторичного источника в точке  $P_1$  пропорциональна  $(j\lambda)^{-1}U(P_1,\nu)$ , и этот источник излучает с амплитудным коэффициентом направленности  $\chi(\theta)$ .

**Функция взаимной когерентности.** При распространении волны в пространстве ее структура изменяется. Изменяется соответственно и функция взаимной когерентности. Следовательно, можно говорить о распространении функции взаимной когерентности.

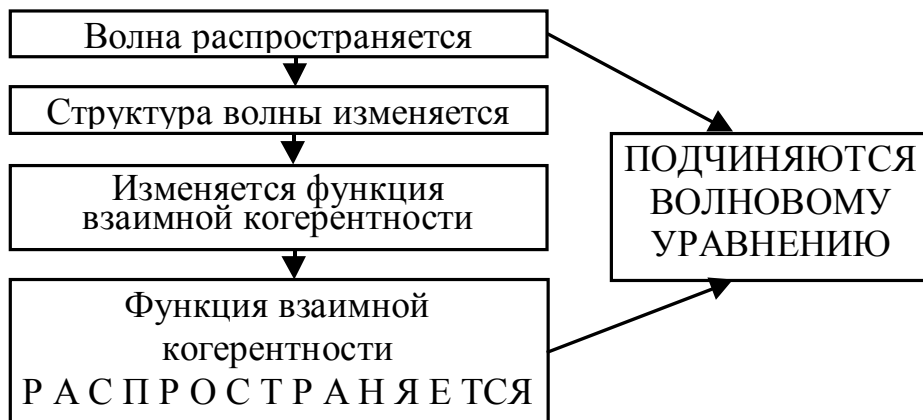


Рис. 6.3. Распространение функции взаимной когерентности

Причина эта объясняется тем фактом, что световые волны подчиняются волновому уравнению.

**Решение, основанное на принципе Гюйгенса–Френеля.** Рассмотрим распространение световой волны с произвольными свойствами когерентности. Дана функция взаимной когерентности  $\Gamma(P_1, P_2; \tau)$  на поверхности  $\Sigma_1$  и надо найти функцию взаимной когерентности  $\Gamma(Q_1, Q_2; \tau)$  на поверхности  $\Sigma_2$ . То есть наша цель предсказать результаты интерференционного опыта Юнга на отверстиях  $Q_1$  и  $Q_2$  если известны результаты интерференционных опытов на всевозможных отверстиях  $P_1$  и  $P_2$ .

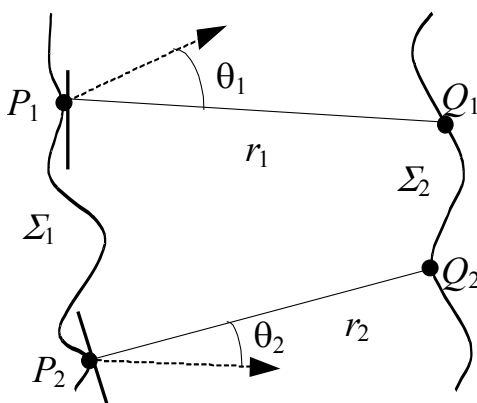


Рис. 6.4. Процесс распространения функции взаимной когерентности

По определению функция взаимной когерентности на поверхности  $\Sigma_2$

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \langle u(Q_1, t + \tau) u^*(Q_2, t) \rangle.$$

Используя выражение для распространения узкополосного сигнала

$$u(Q_o, t) \approx \iint_{\Sigma} \frac{1}{j\lambda r} u(Q_1, t - \frac{r}{c}) dS, \quad r \gg \lambda$$

запишем выражение для узкополосного сигнала для нашего случая для двух точек  $Q_1$  и  $Q_2$  поверхности  $\Sigma_2$

$$u(Q_1, t + \tau) \approx \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{j\lambda r_1} u(P_1, t + \tau - \frac{r_1}{c}) dS_1$$

$$u^*(Q_2, t) \approx \iint_{\Sigma_1} \frac{(-1)}{j\lambda r_2} u^*(P_2, t - \frac{r_2}{c}) dS_2.$$

Подставив выражение для полей в функцию взаимной когерентности и изменяя порядок выполнения интегрирования и усреднения, получим

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \frac{\langle u(P_1, t + \tau - \frac{r_1}{c}) u^*(P_2, t - \frac{r_2}{c}) \rangle}{\lambda^2 r_1 r_2} dS_1 dS_2.$$

Среднее по времени в подынтегральном выражении может быть выражено через функцию взаимной когерентности на поверхности  $\Sigma_1$ , что приводит к основному закону распространения взаимной когерентности

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \Gamma(P_1, P_2; \tau + \frac{r_2 - r_1}{c}) \frac{1}{\lambda r_1} \frac{1}{\lambda r_2} dS_1 dS_2.$$

В соответствии с условием квазимонохроматичности ( $\Delta\omega/\omega \ll 1$ ) оптическая разность хода должна быть намного меньше длины когерентности излучения. Опираясь на это условие, найдем закон распространения излучения для взаимной интенсивности, заметив, что взаимная интенсивность

$$J(Q_1, Q_2) = \Gamma(Q_1, Q_2; 0); \quad \tau=0,$$

а также

$$\Gamma(P_1, P_2; \frac{r_2 - r_1}{c}) = J(P_1, P_2) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right].$$

Подставив это в выражение для распространения взаимной когерентности, при  $\tau=0$  получим

$$J(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} J(P_1, P_2) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right] \frac{1}{\lambda r_1} \frac{1}{\lambda r_2} dS_1 dS_2.$$

Это основное выражение, определяющее закон распространения взаимной интенсивности.

Распределение интенсивности на поверхности  $\Sigma_2$  можно найти, устремив  $Q_1$  к  $Q_2$  (т.е. точки  $Q_1$  и  $Q_2$  должны совпасть) в последней формуле и заменив

$$r_1 \rightarrow r_1', r_2 \rightarrow r_2', \quad Q_1 \rightarrow Q_1', \quad Q_2 \rightarrow Q_2'.$$

### 6.3. Предельные формы функции взаимной когерентности

*Когерентное поле.* Волновое поле называется полностью когерентным, если для всякой пары точек  $(P_1, P_2)$  существует задержка  $\tau_{12}$  (функция точек  $(P_1, P_2)$ ) такая, что  $|\gamma_{12}(\tau_{12})| = 1$ .

Кроме того, можно показать, что волновое поле называется полностью когерентным при том и только при том условии, что для всякой пары точек  $P_1$  и  $P_2$  существует временная задержка  $\tau_{12}$ , такая, что комплексные огибающие двух сигналов с относительной задержкой  $\tau_{12}$  различаются только не зависящим от времени постоянным комплексным множителем  $A(P_2, t) = k_{12} A(P_1, t + \tau_{12})$ ;  $k_{12}$  - комплексная постоянная, которая, вообще говоря, зависит от точек  $P_1$  и  $P_2$ .

Если поле можно считать квазимонохроматическим, то это условие должно выполняться для всех пар точек, возможных в эксперименте. Это означает, что для всех точек  $(P_1, P_2)$  требуется одно и то же время задержки  $\tau_{12}$ , чтобы исключить эффекты временной когерентности. Если отверстие  $P_1$  приблизить к  $P_2$ , то единственная задержка  $\tau_{12}$ , которая соответствует максимуму  $|\Gamma_{12}(\tau)|$ , должна быть тождественно равна нулю. В этом случае комплексные огибающие в точках  $P_1$  и  $P_2$  связаны соотношением  $A(P_2, t) = k_{12} A(P_1, t)$ .

Таким образом, комплексные огибающие во всех точках изменяются согласованно, различаясь только не зависящими от времени амплитудами и фазовыми множителями.

*Некогерентное поле.* Понятию полностью когерентного поля противоположно понятие некогерентного. Поэтому было бы естественным считать поле некогерентным, если выполняется условие  $|\Gamma_{12}(\tau)| = 0$  для всех  $P_1 \neq P_2$  и при всех  $\tau$ . Но это определение не имеет реального смысла.

Подставив  $\Gamma[P_1, P_2; \tau + (r_2 - r_1)/c]$  в выражение для распространения взаимной когерентности и проинтегрировав сначала по поверхности  $\Sigma_1$ , получим, что подынтегральное выражение во втором интеграле будет равно нулю всюду, кроме точек  $P_1 = P_2$ . Таким образом, второе интегрирование дает нуль, и мы получаем  $\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = 0$ .

Если положить  $\tau = 0$  и  $Q_1 = Q_2$ , то из последнего равенства следует

$$I(Q_1) = I(Q_2) = 0.$$

*Следовательно, если волновое поле на поверхности  $\Sigma_1$  некогерентно, то оно не достигает поверхности  $\Sigma_2$ ! Т.е. поверхность не излучает.*

### 6.4. Теорема Ван Циттерта–Цернике. Значение теоремы и следствия из нее

Эта теорема является одной из наиболее важных теорем современной оптики. Она позволяет найти взаимную интенсивность и комплексную степень когерентности для двух точек экрана, освещаемого протяженным

квазимонохроматическим источником. Теорема показывает, как происходит преобразование поперечной корреляционной функции светового пучка в процессе распространения.

Из теоремы следует, что поперечный радиус корреляции частично когерентного волнового пучка в процессе распространения за счет дифракции увеличивается.

Будем считать, что свет является квазимонохроматическим. Мы знаем, что взаимная интенсивность распространяется в соответствии с законом

$$J(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} J(P_1, P_2) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right] \frac{1}{\lambda r_1} \frac{1}{\lambda r_2} dS_1 dS_2,$$

который справедлив для различной степени когерентности, характеризуемой взаимной интенсивностью  $J(P_1, P_2)$ .

Для некогерентного источника с точностью до константы

$$J(P_1, P_2) = I(P_1) \delta(|P_1 - P_2|).$$

Взаимная интенсивность получается, используя "избирательные" свойства  $\delta$ -функции.

$$J(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma} I(P_1) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right] \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} dS.$$

Чтобы упростить это выражение, примем некоторые предположения и приближения.

1. Размеры источника и области наблюдения намного меньше расстояния  $z$ , от источника до плоскости наблюдения, тогда

$$\frac{1}{r_1} \times \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{z^2}.$$

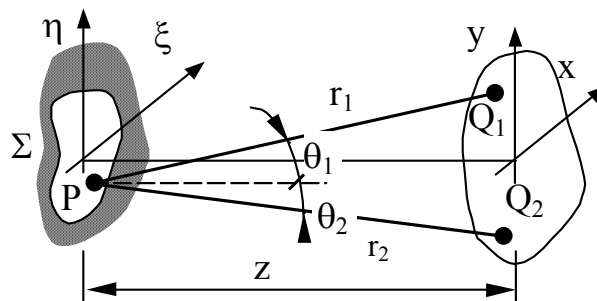


Рис. 6.5. К выводу теоремы Ван Циттерта-Цернике

Тогда выражение для взаимной интенсивности в наблюдаемой области

$$J(Q_1, Q_2) = \frac{1}{(\lambda z)^2} \iint_{\Sigma} I(P_1) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right] dS.$$



Далее, предполагая, что плоскости источника излучения и наблюдения параллельны и учитывая параксиальное приближение

$$r_1 = \sqrt{z^2 + (x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2}{2z},$$

$$r_2 = \sqrt{z^2 + (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}{2z}.$$

Вводя обозначения  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ , и, принимая во внимание, что  $I(\xi, \eta) = 0$  для области вне источника  $\Sigma$ , окончательно получим

$$J(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{e^{-j\Psi}}{(\lambda z)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda z} (\Delta x \xi + \Delta y \eta) \right] d\xi d\eta,$$

где фазовый множитель

$$\Psi = \frac{\pi}{\lambda z} \left[ (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \right] = \frac{\pi}{\lambda z} (\rho_2^2 - \rho_1^2);$$

$\rho_1$  и  $\rho_2$  - расстояния от точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  до оптической оси.

В нормированном виде теорема принимает вид

$$\gamma(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{e^{-j\Psi} \iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda z} (\Delta x \xi + \Delta y \eta) \right] d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) d\xi d\eta}.$$

Если выполняется равенство  $I(x_1, y_1) \approx I(x_2, y_2)$ , то

$$|\gamma(x_1, y_1; x_2, y_2)| - \text{есть видность.}$$

**Значение теоремы и следствия из нее.** Теорема Ван Циттерта-Цернике, может быть сформулирована следующим образом: с точностью до множителя  $\exp(-j\Psi)$  и масштабных постоянных взаимную интенсивность  $J(x_1, y_1; x_2, y_2)$  можно найти, выполнив двумерное преобразование Фурье распределения интенсивности  $I(\xi, \eta)$  по поверхности источника.

Следует также обратить внимание, что  $|\gamma|$  зависит только от разности координат  $(\Delta x, \Delta y)$ .

Поскольку  $\Psi = \frac{\pi}{\lambda z} (\rho_2^2 - \rho_1^2)$  множитель  $\exp(-j\Psi)$  может быть опущен в случаях:

$$1. z \gg 2 \left[ (\rho_2^2 - \rho_1^2) / \lambda \right] \text{ то } \Psi < \pi/2 \text{ и } \exp(-j\Psi) \approx 1.$$

2. Если точки  $Q_1$  и  $Q_2$  находятся на одинаковом расстоянии от оптической оси то фаза  $\psi = 0$ .

3. Если отверстия лежат не на плоскости, а на сфере радиусом  $z$  с центром на источнике.

**ПРИМЕР: Круглое отверстие.** Пусть круглый некогерентный источник радиусом  $a$  с равномерным распределением интенсивности освещает пространство перед собой (рис. 6.6. а). В соответствии с теоремой Ван Циттерта-Цернике функция комплексной когерентности такого источника излучения описывается функцией Эйри. Эта зависимость показана на рис. 6.6. б.

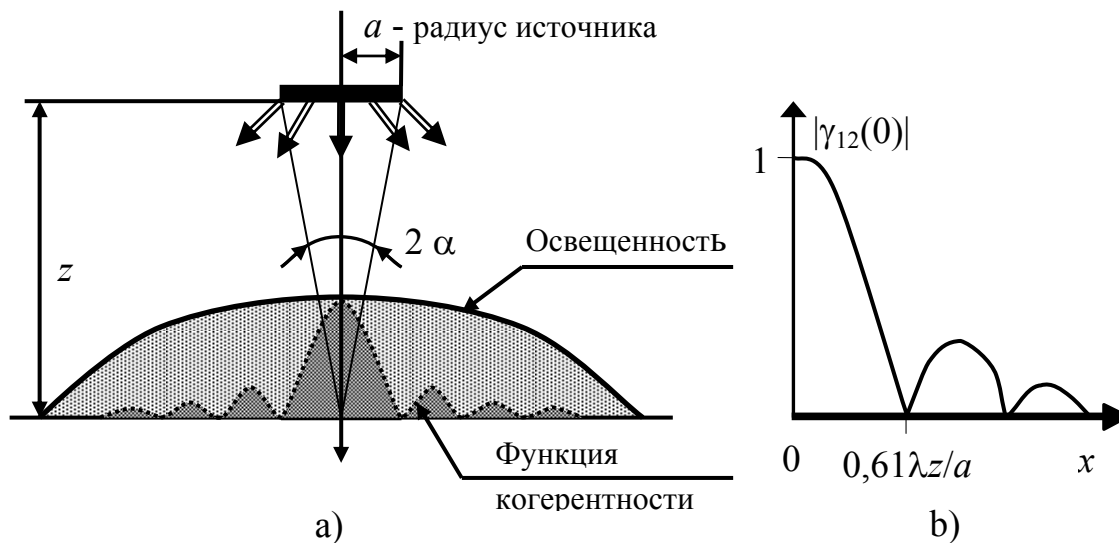


Рис. 6.6. Функция комплексной когерентности для круглого источника

Первый нуль модуля  $|\gamma_{12}|$  имеет место при  $0.61\lambda z/a$ . Следовательно, колебания в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  полностью некогерентны при удалении их друг от друга на расстояние  $d$ , равное  $0,61\lambda z/a$ . Если считать допустимой степень частичной когерентности между точками равной 0.88, то необходимо, чтобы расстояние  $d$  между ними удовлетворяло условию

$$d \leq \frac{0.32\lambda}{2\alpha},$$

$\alpha$  - угол, под которым виден радиус источника.

*Расстояние между точками, для которых  $|\gamma_{12}| = 0.88$  называется интервалом пространственной когерентности.*

При распространении излучения интервал пространственной когерентности, в соответствии с последним выражением, увеличивается (рис. 6.7).

Интервал корреляции для некогерентного источника может значительно превосходить интервал корреляции для когерентного источника (лазера), но

интенсивность его излучения будет на несколько порядков меньше интенсивности источника лазерного излучения.

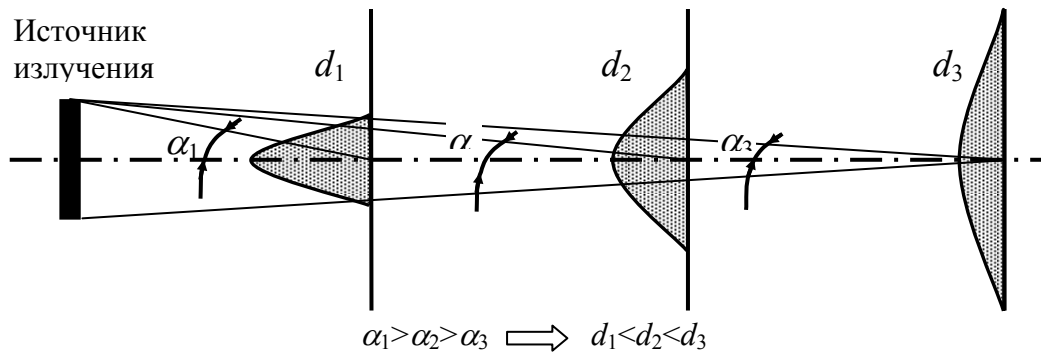


Рис. 6.7. Изменение интервала корреляции при распространении излучения

## 6.5. Дифракция частично когерентного излучения на отверстиях

Рассмотрим случай сравнительно часто встречающийся на практике - падающее излучение является частично когерентным. Предположим, что частично когерентная квазимонохроматическая волна падает на непрозрачный экран с отверстием. Отверстие можно описать амплитудной функцией пропускания вида

$$t_A(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & (\xi, \eta) \text{ на поверхности } \Sigma \\ 0 & \text{в остальной области} \end{cases},$$

которая, в общем случае, является комплексной.

Необходимо найти распределение интенсивности в плоскости экрана, расположенного на расстоянии  $z$  параллельно плоскости отверстия.

Учитывая общее соотношение между взаимной интенсивностью падающей волны и прошедшей

$$J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = t_A(\xi_1, \eta_1) t_A^*(\xi_2, \eta_2) J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2),$$

где  $J_i, J_t$  - соответственно взаимная интенсивность падающей и прошедшей волн, рассмотрим распределение интенсивности в области наблюдения, считая, что размер отверстия и области наблюдения намного меньше расстояния от плоскости отверстия до плоскости наблюдения.

$$I(x, y) \approx \frac{1}{(\lambda z)^2} \int \int \int \int J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_1' - r_2') \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2.$$

Заменим амплитудную функцию пропускания  $t_A$  отверстия функцией "зрачка"  $P(\xi, \eta)$ , которую для общности мы считаем комплексной и получим следующее выражение

$$I(x, y) \approx \frac{1}{(\lambda z)^2} \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi_1, \eta_1) P^*(\xi_2, \eta_2) J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \times \\ \times \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_1' - r_2') \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2$$

Упростим данное выражение, сделав предположение, что функция взаимной интенсивности может быть представлена в форме

$$J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = I_0 \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta),$$

где  $\gamma_i$  - комплексный коэффициент когерентности. Данное приближение справедливо, например, в схеме, где свет некогерентного источника достигает отверстия, проходя через конденсорную систему.

В параксиальном приближении можно воспользоваться следующим выражением

$$r_2' - r_1' \approx \frac{1}{2z} \left[ (\xi_2^2 + \eta_2^2) - (\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2(x\Delta\xi + y\Delta\eta) \right] = \\ = \frac{1}{z} \left[ \bar{\xi}\Delta\xi + \bar{\eta}\Delta\eta - x\Delta\xi - y\Delta\eta \right].$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \Delta\eta = \eta_2 - \eta_1, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}.$$

Запишем выражение для интенсивности

$$I(x, y) = \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} P \left( \bar{\xi} - \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} - \frac{\Delta\eta}{2} \right) P^* \left( \bar{\xi} + \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} + \frac{\Delta\eta}{2} \right) \times \\ \times \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda z} (\bar{\xi}\Delta\xi + \bar{\eta}\Delta\eta) \right\} \times \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta) \right\} d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\Delta\xi d\Delta\eta$$

Предположим опять, что  $z$  не меньше геометрического среднего из расстояний до области дальнего поля при соответствующих размерах отверстия и площади когерентности:

$$z > 4 \frac{\xi\Delta\xi}{\lambda}, \quad z > 4 \frac{\bar{\eta}\Delta\eta}{\lambda}.$$

Это позволяет нам опустить первый экспоненциальный множитель, что приводит к следующему выражению

$$I(x, y) \approx \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} R(\Delta\xi, \Delta\eta) \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta) \right] d\Delta\xi d\Delta\eta,$$

где  $R$  - автокорреляционная функция комплексной функции зрачка  $P$ , которая по определению равна:

$$R(\Delta\xi, \Delta\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\bar{\xi} - \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} - \frac{\Delta\eta}{2}\right) P^*\left(\bar{\xi} + \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} + \frac{\Delta\eta}{2}\right) d\bar{\xi} d\bar{\eta}.$$

Таким образом, *распределение интенсивности  $I(x, y)$  в дифракционной картине можно найти, выполнив двумерное преобразование Фурье произведения функций  $R$  и  $\gamma_i$ .*

Рассмотрим теперь более подробно условия, наложенные на удаление области наблюдения в зависимости от области рассмотрения в плоскости объекта дифракции  $z > 4 \frac{\bar{\xi} \Delta\xi}{\lambda}$ ,  $z > 4 \frac{\bar{\eta} \Delta\eta}{\lambda}$ .

Во-первых, можно показать, что необходимость наложения данного условия отпадает, если в контакте с плоскостью отверстия находится собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = z$ . Если линза отсутствует, то этим условиям удовлетворить гораздо труднее, поскольку здесь не сделано предположение, что площадь когерентности намного меньше площади источника.

Во вторых, если  $D$  - максимальный линейный размер отверстия, а  $d_c$  - максимальный линейный размер области когерентности на апертуре, то требуемые условия будут выполняться, когда

$$z > \begin{cases} \frac{2D^2}{\lambda} & \text{при } d_c > D, \\ \frac{2Dd_c}{\lambda} & \text{при } d_c < D \end{cases}.$$

Условие  $z > 2D^2/\lambda$  идентично условию дифракции Фраунгофера. Это условие накладываем, если падающее на отверстие излучение приближается к полностью когерентному.

Физический смысл данной теоремы лучше всего уяснить, рассматривая предельные случаи.

1. Пусть отверстие освещается плоской волной, падающей нормально (такое освещение является полностью когерентным). Следовательно, комплексный коэффициент когерентности  $\gamma_i$  равен 1 и мы получаем

$$I(x, y) \approx \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right] d\Delta\xi d\Delta\eta.$$

Результат, получаемый на основании данной теоремы, должен полностью соответствовать результату, получаемому в соответствии дифракционной формулой Фраунгофера для интенсивности

$$I(x, y) = \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi, \eta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi x + \eta y) \right] d\xi d\eta \right|^2.$$

2. Пусть падающее излучение имеет площадь когерентности много меньшую чем размер отверстия. В этом случае автокорреляционная функция  $R$  в пределах всей апертуры (в пределах всей области значений  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ , для которых  $\gamma_i \neq 0$ ) имеет примерно постоянное значение равное площади отверстия.

$$I(x, y) \approx \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta) \right] d\Delta\xi d\Delta\eta.$$

Следовательно, во втором случае, форма наблюдаемой дифракционной картины распределения интенсивности определяется, в основном, комплексным коэффициентом когерентности  $\gamma_i$  и практически не зависит от формы отверстия при условии, что  $D \gg d_c$ . В промежуточных случаях распределение интенсивности  $I(x, y)$  определяется сверткой Фурье-образов величин  $R$  и  $\gamma_i$ .

В этом случае происходит "сглаживание" дифракционной картины по мере постепенного уменьшения площади когерентности.

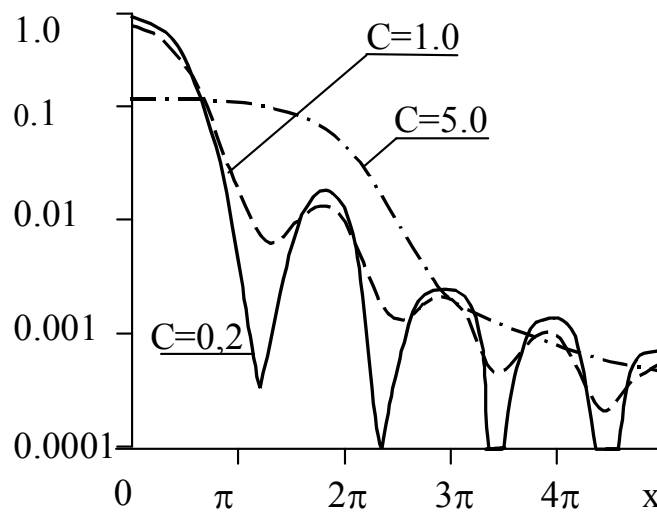


Рис. 6.8. Картина дифракции на круглом отверстии. Параметр  $C$  – отношение площади круглого отверстия к площади когерентности

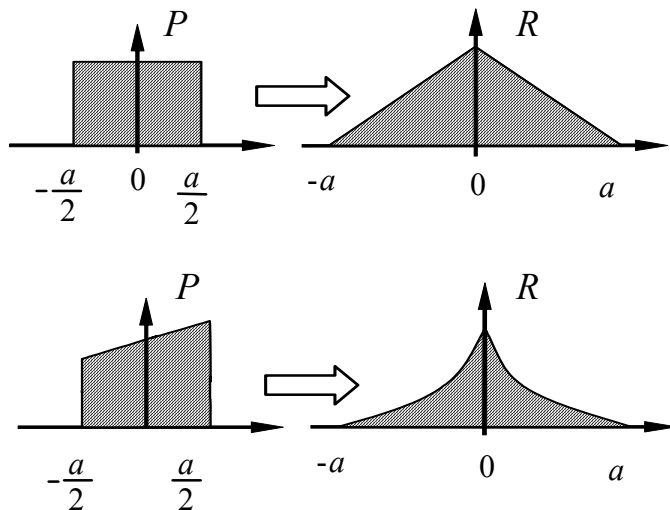


Рис. 6.9. Примеры распределения амплитуды поля для одномерного случая и вид автокорреляционной функции зрачка

Как следует из приведенного выше рисунка, автокорреляционная функция зрачка существенно зависит от вида распределения поля.

### 6.6. ПРИМЕР: Дифракция частично когерентного излучения на щели

Дано щелевое отверстие шириной  $D$ , на которое падает частично когерентное излучение. Для равномерно освещенной щели автокорреляционная функция имеет вид

$$K(x) = 1 - \frac{|x|}{D}.$$

Функцию пространственной когерентности, в соответствии с экспериментальными данными, можно аппроксимировать следующим образом

$$\gamma_{12}(0) = \cos \frac{0.57x}{\alpha},$$

где  $\alpha$  - интервал корреляции. Коэффициент 0,57 введен для сохранения смысла интервала корреляции, при ее измерении на уровне 0,84 (для щели).

Распределение интенсивности

$$I(\theta, \alpha) \approx \frac{1}{D} \int_{-D}^D \cos \frac{0.57x}{\alpha} \left(1 - \frac{|x|}{D}\right) \exp(ik\theta x) dx.$$

Введем обозначения  $v = 0.57D / \alpha$ ,  $2u = k\theta D$ . После ряда преобразований получим окончательное выражение, пропорциональное распределению интенсивности в дальней зоне при дифракции на щели частично когерентного излучения с заданной функцией когерентности:

$$I(\theta, \alpha) = \frac{2 \left[ v^2 + (2u)^2 \right]}{\left[ v^2 - (2u)^2 \right]} - \frac{\cos(v + 2u)}{(v + 2u)^2} - \frac{\cos(v - 2u)}{(v - 2u)^2}.$$

В пределе, когда  $\alpha \rightarrow \infty$  ( $v = 0$ ), нормированная интенсивность приводится к виду хорошо известного выражения для дифракции Фраунгофера на щели, освещенной однородным когерентным излучением:

$$I(\theta, 0) = \frac{2}{(2u)^2} (1 - \cos 2u) = \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2.$$

При  $u \rightarrow 0$  распределение интенсивности стремится к величине пропорциональной

$$I(\theta, \alpha) = \frac{2}{v^2} (1 - \cos v).$$

Таким образом, интенсивность в центре дифракционной картины зависит только от параметра  $v$ , то есть отношения интервала корреляции к размеру измеряемого изделия  $i$ , как следует из этого выражения, с увеличением  $v$  уменьшается.

Анализ влияния пространственной когерентности на дифракционное распределение интенсивности показывает, что при увеличении отношения  $D/\alpha$ , уровень интенсивности центрального и боковых лепестков уменьшается, интенсивность в минимумах дифракционной картины увеличивается, угловой размер центрального дифракционного лепестка также увеличивается (рис. 6.10). Относительный размер центрального дифракционного лепестка увеличивается, а боковых уменьшается, причем с удалением от центра дифракционной картины влияние пространственной когерентности на размер лепестков становится меньше. Контраст дифракционной картины с уменьшением степени когерентности излучения падает (рис. 6.11).

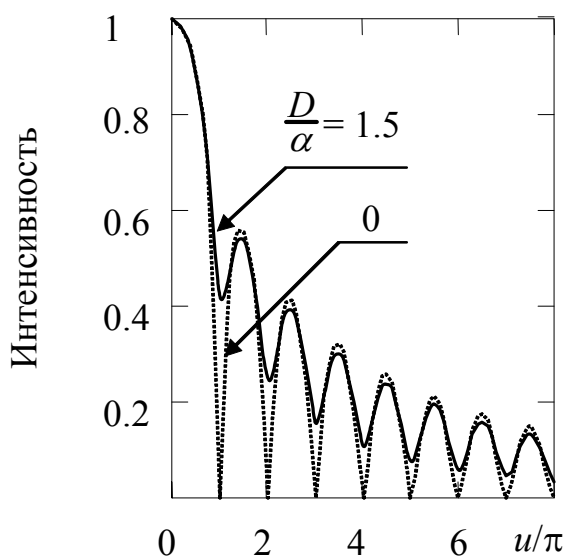


Рис. 6.10. Влияние пространственной когерентности излучения на ДК

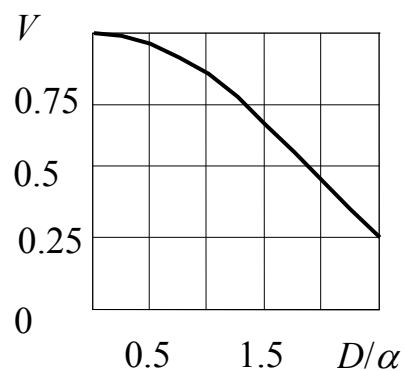


Рис. 6.11. Влияние степени когерентности излучения на контраст ДК



## 7. Когерентность лазерного излучения

### 7.1. Пространственная когерентность излучения. Многомодовый режим излучения лазера. Радиус корреляции лазерного излучения

Поперечная структура реальных лазерных пучков имеет случайный характер, что обусловлено целым рядом естественных причин: спонтанные шумы, статистика многих поперечных мод.

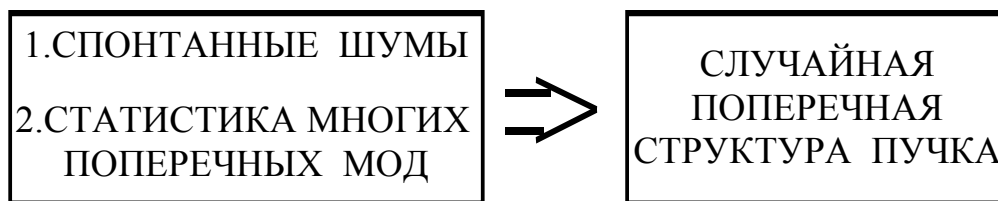


Рис. 7.1. Причины случайного характера поперечной структуры реальных лазерных пучков

Чем же определяются характерные масштабы поперечных корреляций лазерного излучения?

Предположим, что возбуждаемые в лазере моды с различными поперечными индексами  $m$  и  $n$  вырождены по частоте, тогда многомодовое излучение можно записать следующим образом

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{m,n} A_{m,n}(\mathbf{r}, z) \exp[i(\omega_0 t - kz + \varphi_{m,n})],$$

где  $A_{m,n}$  и  $\varphi_{m,n}$  - не зависящие от времени комплексные амплитуды и фазы мод,  $z$  - координата вдоль направления распространения пучка, отсчитываемая от области перетяжки.

Распределение амплитуд  $A_{m,n}$  зависит от типа оптического резонатора и формы зеркал.

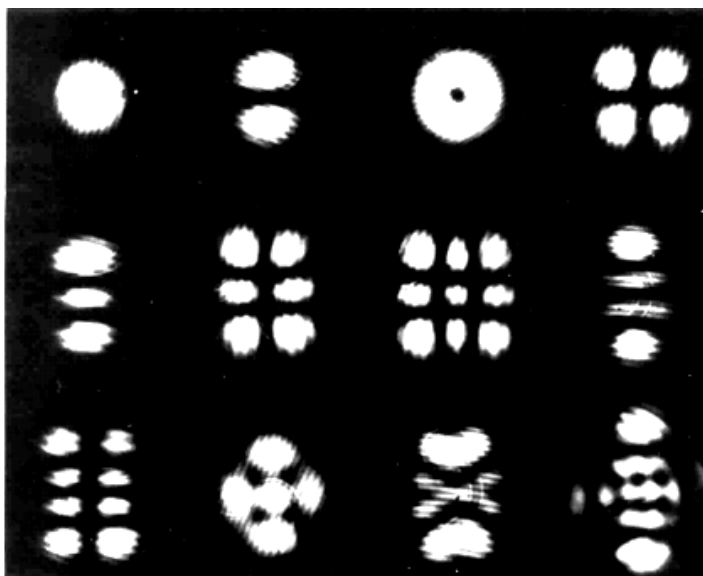


Рис. 7.2. Возможные виды распределения интенсивности в поперечном сечении реального лазерного пучка.

Наиболее простой вид распределения амплитуды  $A_{m,n}$  имеют для плоскопараллельного резонатора (случай прямоугольных зеркал)

$$A_{m,n}(\mathbf{r}) = A_{m,n}(x, y) = h_{m,n} f_m(x) f_n(y)$$

$$\text{где } f_m(x) = \begin{cases} \cos \beta m x, & m = 1, 3 \\ \sin \beta m x, & m = 2, 4 \end{cases},$$

где  $\beta$ , комплексный параметр, зависящий от базы резонатора и апертуры зеркал.

Аналогичный вид имеет функция  $f_n(y)$ .

Для пространственной поперечной корреляционной функции на выходе резонатора по определению имеем:

$$B_{\perp}(\mathbf{s}) = \langle E(\mathbf{r}, z, t) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, z, t) \rangle.$$

В случае статистически независимых фаз  $\varphi_{m,n}$  поперечных мод

$$B_{\perp}(\mathbf{s}) = \sum_{m,n} \langle A_{m,n}(\mathbf{r}, z) A_{m,n}^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, z) \rangle.$$

Рассчитаем корреляционную функцию вблизи центра пучка ( $\mathbf{r} = 0$ ), смещение  $\mathbf{s}$  зададим вдоль оси  $x$  и будем считать, что возбуждаются поперечные моды с индексами от  $m = 1$  до  $m = N_{\perp}$ .

Пусть  $N_{\perp}$  нечетно и коэффициенты  $h_{m,n}$  - одинаковы, тогда для пространственной поперечной корреляционной функции получим

$$B_{\perp}(\mathbf{s}) = 2 \sum_{q=1}^{(N_{\perp}+1)/2} \cos \beta^* (2q-1) \mathbf{s} = \sin[(N_{\perp}+1) \beta \mathbf{s}] \operatorname{cosec}(\beta^* \mathbf{s}).$$

При большом числе поперечных мод  $N \gg 1$ , модуль степени пространственной когерентности равен

$$|\gamma(\mathbf{s})| = \left| \frac{\sin(N_{\perp} \beta^* \mathbf{s})}{N_{\perp} \sin(\beta^* \mathbf{s})} \right|.$$

Модуль степени пространственной когерентности является квазипериодической функцией. В реальных случаях база резонатора  $L$  много больше характерного размера зеркал  $a$  ( $L \gg a$ ), а число Френеля  $(ka^2/2\pi L) \geq 1$ . С учетом этого условия, радиус корреляции  $r_k \approx a / N_{\perp}$ .

Таким образом, для многомодовых лазерных пучков, возбуждаемых в плоскопараллельном резонаторе с прямоугольными зеркалами радиус корреляции обратно пропорционален числу возбуждаемых поперечных мод  $N_{\perp}$ .

Но это соотношение можно использовать лишь для грубых оценок. Отличия от эксперимента могут быть связаны с неоднородностями активной среды, неравномерностью распределения интенсивностей по модам.

Приближенный расчет радиуса корреляции лазерного поля со статистически независимыми модами можно выполнить и другим способом - оценивая средний размер неоднородности по возбуждаемым модам, который в соответствии с выражением для распределения амплитуды моды по половинному уровню можно оценить как  $r_m \approx 2a/m$ .

Для плоского резонатора получим  $r_k \approx 2a \ln N_{\perp}/N_{\perp}$ .

Таким образом, данное выражение, которое получается исходя из поперечной неоднородности лазерного пучка, дает практически такую же зависимость, что и предыдущее.

*При наличии неоднородностей внутри резонатора даже для плоскопараллельного резонатора более адекватной оказывается модель сферического резонатора.*

Аналогичным способом, исходя из масштаба радиальных неоднородностей можно найти радиус корреляции для сферического резонатора  $r_k \approx \sqrt{3}w(z)/\sqrt{N_{\perp}}$ .

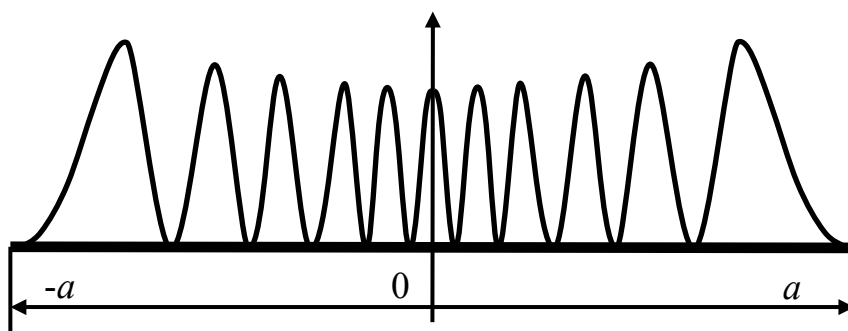


Рис. 7.3. Распределения интенсивности в поперечном сечении для сферического резонатора с радиусом зеркала  $a$

Последнее выражение существенно отличается от выражения, полученного для плоского резонатора, т.к. в последнем случае с увеличением номера радиального индекса поперечной моды  $n$  размер поперечных осцилляций становится обратно пропорциональным  $\sqrt{n}$ , где  $n$  радиальный индекс полинома Лагерра, определяющий число радиальных осцилляций в моде сферического резонатора. То есть радиус корреляции уменьшается значительно медленней (скорость спада функции когерентности меньше).

Радиус поперечной корреляции	
РЕЗОНАТОР	
Плоский	Сферический
$r_k \approx \frac{2a \ln N_{\perp}}{N_{\perp}}$	$r_k \approx \frac{\sqrt{3}w(z)}{\sqrt{N_{\perp}}}$

Рис. 7.4. Зависимость радиуса поперечной корреляции от формы резонатора

Зависимость радиуса корреляции от числа поперечных мод хорошо подтверждается экспериментально. С увеличением числа поперечных мод вид функции когерентности стремится к виду функции когерентности для некогерентного источника, что согласуется с теоремой Ван Циттерта-Цернике.

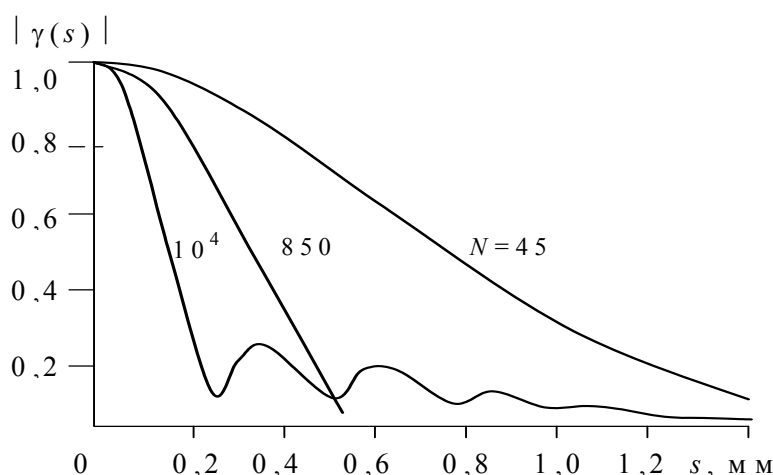


Рис. 7.5. Вид экспериментальной поперечной корреляционной функции излучения твердотельного многомодового лазера.  $N$  – число мод

Радиус корреляции лазерного пучка, как и ширина пучка, является функцией продольной координаты  $z$ . Измерения показали, что для многомодового режима при удалении от выходного зеркала отношение диаметра пучка к радиусу корреляции сохраняется постоянным:  $D(z)/r_k = const.$ , что следует из характера изменения масштаба неоднородностей поля при распространении лазерного пучка. Оно пропорционально  $\pi r/m$ .

Поведение пространственной корреляционной функции излучения многомодового лазера, с изменением числа генерируемых поперечных мод, хорошо согласуется с представлениями, основанными на описании поперечного распределения лазерного поля, как результата наложения статистически независимых поперечных мод. Для точного расчета формы поперечных

корреляционных функций необходимо располагать информацией об амплитудах мод, возбуждаемых в лазере.

Следует отметить, что при большом числе поперечных мод, корреляционная функция поля близка по виду к корреляционной функции однородного  $\delta$  коррелированного шума, профильтрованного через круглую диафрагму (теорема Ван Циттерта-Цернике).

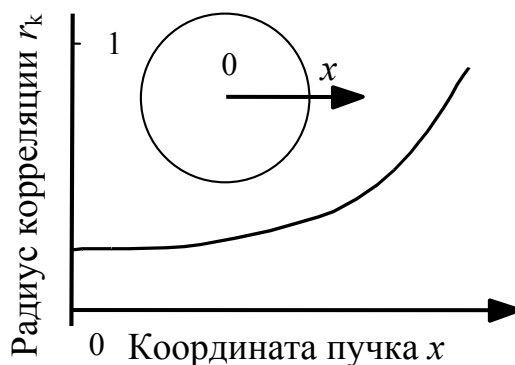


Рис. 7.6. Значение радиуса корреляции в различных точках поперечного сечения многомодового лазерного пучка

Измерение функции когерентности при разных смещениях относительно центра пучка, показывает, что при многомодовом режиме работы минимальный радиус корреляции оказывается в центре лазерного пучка. При смещении к периферии пучка радиус корреляции растет (рис. 7.6). Этот факт объясняется неравномерной однородностью пучка по поперечному сечению. Наглядно это можно увидеть, если нарисовать суперпозицию мод в лазерном пучке. В центре пучка присутствуют все моды - максимальная неоднородность; к периферии визуальную степень неоднородности уменьшаются.

## 7.2. Предельная пространственная когерентность излучения одномодового лазера

Присутствующее в лазере спонтанное излучение приводит к естественным флуктуациям амплитуды и фазы лазерного поля. Однако спонтанное излучение некоррелировано не только во времени, но и в пространстве. Поэтому оно неизбежно вызывает и естественные пространственные флуктуации амплитуды и фазы лазерных пучков.

В надпороговом режиме работы лазера естественные флуктуации лазерных пучков в пространстве и во времени являются слабыми.

В отличие от частотного спектра, угловой спектр, связанный с естественными пространственными флуктуациями лазерных параметров, не удастся измерить непосредственно, поскольку он "маскируется" более сильной - дифракционной.

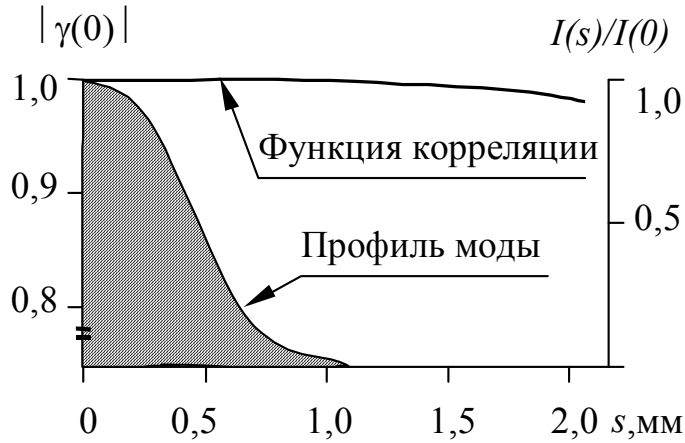


Рис. 7.7. Поперечная корреляционная функция моды нулевого порядка и профиль моды нулевого порядка

При измерении поперечных корреляционных функций одномодовых лазерных пучков обнаруживается слабое отличие пространственной когерентности от полной (рис. 7.7). Эти отличия вызваны спонтанным излучением. При увеличении мощности излучения He-Ne лазера степень пространственной когерентности растет.

Для точек, в которых интенсивность составляет  $1 \times 10^{-1}$  и  $1 \times 10^{-3}$  максимальной величины экспериментально полученные значения  $|\gamma(s)|$  равны  $0,9991 \pm 1 \times 10^{-4}$  и  $0,998 \pm 1 \times 10^{-3}$ . Для интерпретации полученных данных рассмотрим следующую модель. Представим поле излучения одномодового лазера выше порога генерации в виде

$$E(\mathbf{r}, t, z) = \rho(\mathbf{r})[1 + m(\mathbf{r})] \exp i\{\omega_0 t - k_0 z + \varphi(\mathbf{r})\},$$

где амплитуда  $\rho(\mathbf{r})$  определяет регулярный профиль пучка,  $m(\mathbf{r})$  – случайный коэффициент амплитудной модуляции,  $\varphi(\mathbf{r})$  – флуктуирующая фаза, причем  $\bar{m} = \bar{\varphi} = 0$ .

В соответствии с этим нормированная поперечная корреляционная функция равна

$$\gamma(s) = \frac{\langle E(\mathbf{r}, t, z) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z) \rangle}{\sqrt{\langle |E(\mathbf{r}, t, z)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z)|^2 \rangle}} = \frac{1 + \overline{m^2} \gamma_m(\mathbf{s})}{1 + \overline{m^2}} \langle e^{-i\Delta\varphi(\mathbf{s})} \rangle.$$

Здесь  $\Delta\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})$  и  $\gamma_m(\mathbf{s}) = \langle m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \rangle / \langle m^2 \rangle$ .

Далее предположим, что

$$\langle \exp[-i\Delta\varphi(s)] \rangle = \exp\{-D_{\perp} s\},$$

где  $D_{\perp}$  – коэффициент поперечной диффузии фазы. Для смещений  $s$  таких, что  $\gamma_m(s) \approx 0$  и  $D_{\perp} s < 1$ , с учетом  $\langle m^2 \rangle \ll 1$  выражение для нормированной

поперечной корреляционной функции, определяемой случайной амплитудной модуляцией, преобразуется к виду  $\gamma_m(s) \approx 1 - \langle m^2 \rangle - D_{\perp} s$ .

Отсюда следует, что  $\frac{d}{ds} [1 - \gamma(s)] \approx D_{\perp}$ .

Обработка экспериментальных данных для нормированной поперечной корреляционной функции низшей моды гелий-неонового лазера, в соответствии с рассмотренной моделью, дает: случайный коэффициент амплитудной модуляции

$$\langle m^2 \rangle \approx 3 \cdot 10^{-5}, \quad D_{\perp} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}.$$

С поперечным коэффициентом диффузии фазы  $D_{\perp}$  можно связать естественную угловую расходимость  $\Delta\theta_e$ ;

$$\Delta\theta_e \approx D_{\perp} / k_0 \approx 10^{-7}.$$

Это значение существенно меньше дифракционной расходимости лазерных пучков  $\Delta\theta_d \approx \lambda / a \approx 10^{-3} - 10^{-4}$  (а – радиус пучка).

Экспериментальные измерения степени пространственной когерентности излучения лазера, работающего в одномодовом режиме были выполнены на разных длинах волн и разных поперечных модах и подтверждают предложенную модель.

В ранних работах была измерена пространственная когерентность излучения лазера, работающего на одной из трех мод  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{10}$ ,  $TEM_{30}$ . Одним из источников погрешности в данном случае являлся конечный размер диафрагмы фотоприемника (0,3 мм). Степень когерентности рассчитывалась по известной формуле

$$|\gamma_{12}| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \cdot \frac{I_1 + I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}}.$$

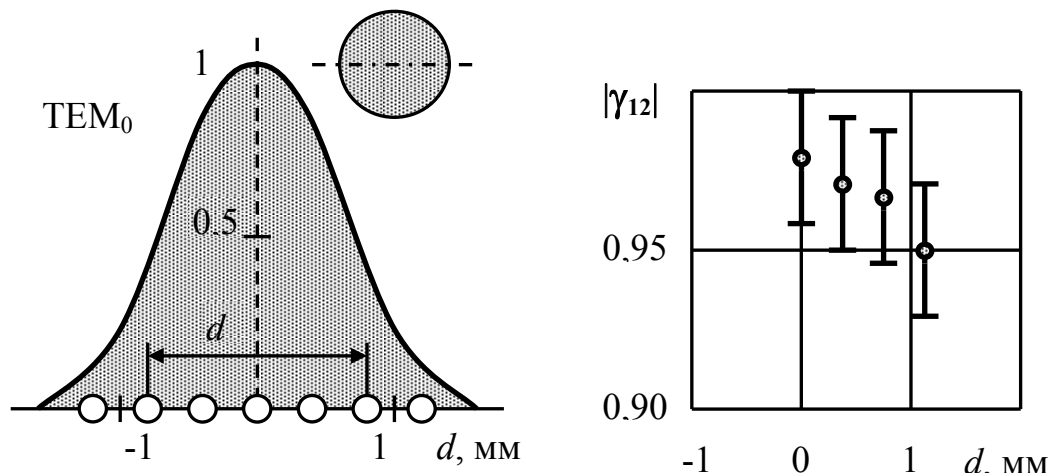


Рис. 7.8. Степень когерентности He-Ne лазера, работающего на длине волны 1.15 мкм на основном типе колебаний

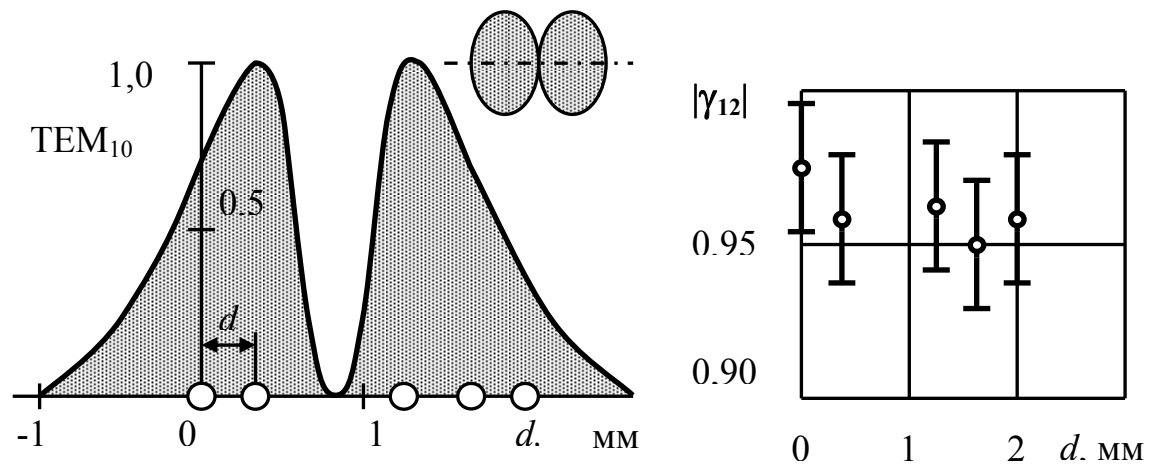


Рис. 7.9. Степень когерентности He-Ne лазера, работающего на длине волны 1.15 мкм на моде первого порядка

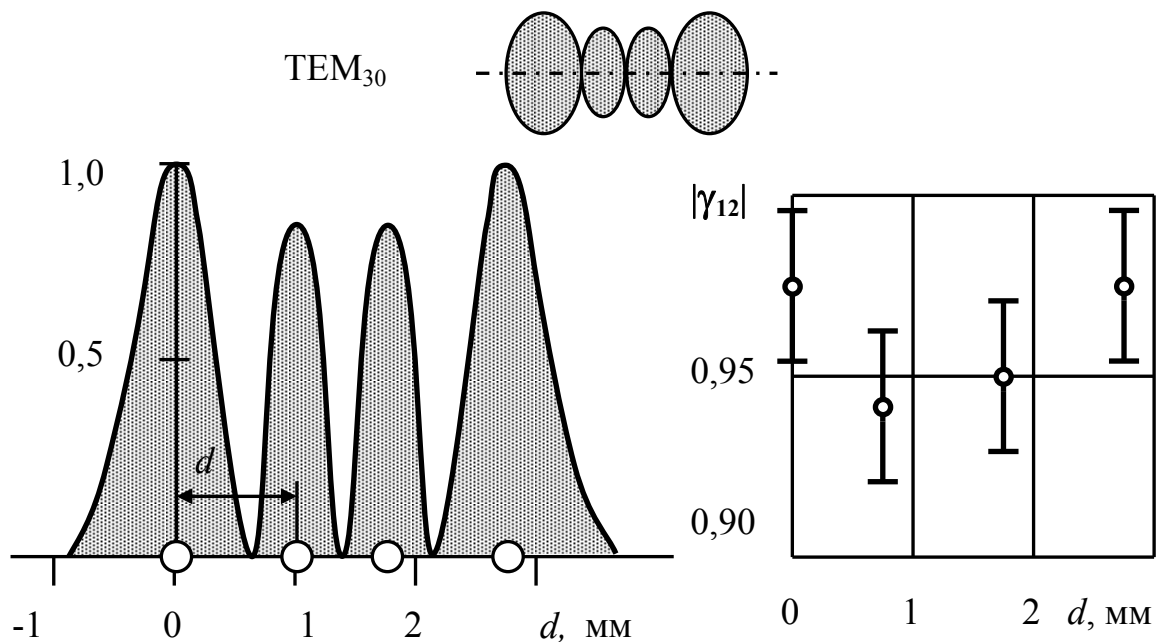


Рис. 7.10. Степень когерентности He-Ne лазера, работающего на длине волны 1.15 мкм на моде третьего порядка

Как следует из приведенных результатов степень когерентности в пределах одной моды практически равна единице независимо от порядка моды.

### 7.3. Временная когерентность излучения лазера

#### Ширина линии излучения одномодового лазера, работающего выше порога

Неизбежные в лазерах нестабильности параметров представляют собой по существу случайные процессы. Спектры этих процессов отличны от нуля лишь в узкой области вблизи нулевой частоты; эффективная ширина спектра флуктуаций параметров лазера не превышает обычно  $10^2 - 10^3$  Гц. Воздействие флуктуаций параметров на оптический генератор проявляется, поэтому обычно в виде медленной, квазистатистической случайной модуляции амплитуды и частоты (фазы).



Колебания реального генератора, близкие к гармоническим, представляют собой случайный процесс вида

$$x(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Статистические характеристики  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$  в рассматриваемом случае, разумеется, существенно отличаются от таковых для узкополосного гауссова шума. Амплитуда флуктуирует вблизи среднего значения  $\bar{\rho}$ , определяемого динамическими свойствами системы; флуктуации амплитуды и фазы в общем случае коррелированы.

По известным статистическим характеристикам  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$  можно определить и форму спектральной линии. Если относительные флуктуации амплитуды невелики, форма и ширина спектральной линии в основном определяются квазистатическими флуктуациями частоты. Хорошим приближением в этом случае оказывается модель медленных и сильных гауссовых флуктуаций частоты. Тогда спектр автоколебаний имеет вид

$$G(\omega) = \frac{\rho^2}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_\omega^2}\right],$$

где  $\sigma_\omega^2$  - дисперсия частоты,  $\sigma_\omega^2 \sim \int_0^\infty G_n(\omega) d\omega$ .

Ширину спектральной линии

$$\sigma_\omega = \Delta\omega_T$$

называют *технической шириной*, подчеркивая этим, что причиной уширения линии в рассматриваемом случае оказываются факторы технического порядка, вклад которых зависит от конструкции лазера, стабилизации параметров и т. п. Величина  $\Delta\omega_T$  различна для различных типов лазеров. Переход к высокостабильным системам, например таким, как лазеры, стабилизированные по сверхузким оптическим резонансам в атомах и молекулах, позволяет получить ширину спектральной линии  $\sim 0,5$  Гц.

Чем определяются предельные возможности сужения линии? Оказывается, что наряду с “техническими” флуктуациями имеются обстоятельства и более принципиального характера. Даже в гипотетической автоколебательной системе, каковой можно считать и лазер, с абсолютно стабильными параметрами генерирование идеальных монохроматических колебаний невозможно. Причиной этого является принципиально неустранимые собственные шумы генератора, таковыми для лазера являются спонтанные переходы. Этот источник флуктуаций в лазере следует рассматривать, очевидно, как случайную внешнюю силу, в спектре которой имеются и компоненты на частоте автоколебаний. Как ведет себя автоколебательная система, находящаяся под воздействием случайной силы? Оказывается, что и в этом случае дело сводится к случайным амплитудной и фазовой модуляциям. Автоколебания описываются случайным процессом вида

$x(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ . Статистические же характеристики возникающих под действием собственных шумов *естественных флуктуаций* амплитуды и фазы, разумеется, отличаются от технических; по иному выглядит и спектр колебаний.

Для естественных флуктуаций частоты форма спектральной линии становится лоренцевской.

Естественная ширина спектральной линии  $\Delta\omega_e$  обычно много уже технической,  $\Delta\omega_e \ll \Delta\omega_T$ , однако для высокостабильных генераторов оптического диапазона, эффекты обусловленные естественными флуктуациями, становятся существенными.

Получение предельной стабильности частоты лазера возможно, рассматривая колебания для обычного автогенератора, одним из примеров которого является лазер.

В оптическом резонаторе происходят процессы связанные как с увеличением энергии, так и с потерями. Поэтому величина добротности может быть определена следующим образом:

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{\text{суммарные потери энергии когерентного излучения в секунду}}$$

Пусть  $P_{\text{ког}}^{(i)}$  - скорость, с которой когерентная энергия вкладывается в моду, а  $P_{\text{ког}}^{(0)}$  - скорость потерь энергии когерентного излучения при прохождении через зеркала. Тогда

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{P_{\text{ког}}^{(0)} - P_{\text{ког}}^{(i)}}$$

В стационарных условиях полная скорость поступления энергии в моду складывается из когерентного (вынужденного) излучения и спонтанного

$$P_{\text{ког}}^{(i)} + P_{\text{неког}}^{(i)} = P^{(0)} \approx P_{\text{ког}}^{(0)},$$

и приведенное выше соотношение превращается в

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{P_{\text{неког}}^{(i)}}$$

Чтобы вычислить  $P_{\text{неког}}^{(i)}$ , заметим, что отношение скоростей для вынужденного и спонтанного излучения в данной моде равно числу фотонов, присутствующих в ней. Это число можно связать с интенсивностью  $I$  поля в моде внутри резонатора, или с выходной мощностью  $P^{(0)}$ :  $N_p = IaL / ch\nu = P^{(0)}L / \alpha_{\text{отр}} ch\nu$ , где  $a$  - площадь поперечного сечения моды,  $L$  -

длина резонатора, а  $\alpha_{отр}$  - коэффициент, учитывающий потери на зеркалах. Скорость вынужденного испускания в моде равна

$$B_{mn} N_m g(\nu, \nu_{mn}) I h \nu a L / c ,$$

так, что  $P_{некоз}^{(i)}$  получается делением

$$P_{некоз}^{(i)} = B_{mn} N_m g(\nu, \nu_{mn}) (h \nu)^2 .$$

Энергия, запасенная в моде, есть  $N_p h \nu$  и, следовательно, добротность для моды равна

$$Q = \frac{\nu}{\delta \nu} = \frac{2 \pi \nu P^{(0)} L}{B_{mn} N_m g(\nu, \nu_{mn}) (h \nu)^2 \alpha_{отр} c} ,$$

где  $\delta \nu$  - ширина линии на выходе лазера.

На пороге генерации получим

$$B_{mn} g(\nu, \nu_{mn}) h \nu N_m = \frac{\alpha_{отр} c}{d} \left[ 1 - \frac{g_m N_n}{g_n N_m} \right]_{пор}^{-1} .$$

И с учетом величины добротности, запасенной в моде, а также с учетом выражения для  $\Delta \nu_{рез} = c \alpha / 2 \pi L$ , находим

$$\delta \nu = \frac{2 \pi (\Delta \nu_{рез})^2 h \nu}{P^{(0)}} \left[ 1 - \frac{g_m N_n}{g_n N_m} \right]_{пор}^{-1} .$$

В обычных условиях, когда  $N_m \gg N_n$ , последнее выражение упрощается.

Теоретическая ширина линии

$$\delta \nu = \frac{8 \pi h \nu}{P^{(0)}} (\Delta \nu_{рез})^2 .$$

По мере возрастания мощности излучения, выходящего из резонатора линия генерации в моде становится все уже.

Применив данное выражение для He-Ne лазера с выходной мощностью 1 мВт, получим  $\delta \nu \sim 5 \cdot 10^{-4}$  Гц, если пропускание зеркал составляет 1 % на длине волны 0,6328 мкм, а длина резонатора 1 м.

Для полупроводникового лазера на  $Pb_{0,88}Sn_{0,12}T$ , излучающего на длине волны 10,6 мкм, при мощности излучения  $P \approx 200$  мкВт и  $\Delta \nu_{рез} \approx 10^8$  Гц ширина линии  $\Delta \omega_e \approx 10$  кГц.

Обеспечение на практике таких режимов не представляется возможным, что следует из произведения  $\Delta \nu \Delta t = 1$  ( $\Delta t$  - время установления устойчивого режима). Действительно, так как частоты генерации определяются длиной

резонатора, ширина линии будет равна теоретической величине, если выдержать длину резонатора с относительной погрешностью

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta \nu}{\nu} \approx \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{14}} = 1 \cdot 10^{-18}$$

в течение времени  $\Delta t = \frac{1}{\Delta \nu} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} \approx 10^3$  с.

Ясно, что из-за механических нестабильностей, теплового дрейфа и других причин такую стабильность длины резонатора выдержать практически невозможно.

На практике ширина линии составляет в лучшем случае несколько герц, так как преобладают другие факторы, вызывающие значительное возрастание спектральной ширины. В газовых лазерах практически достижимая предельная ширина определяется, по-видимому, тепловыми флуктуациями материала, из которого сделаны держатели зеркал лазера, а также неоднородностью показателя преломления усиливающей среды. В противоположность этому в твердотельных лазерах с модулированной добротностью ширина линии определяется длительностью импульса лазера (через соотношение неопределенностей).

Время спонтанного излучения, или время релаксации, типичного атомного уровня по порядку величины равно  $10^{-8}$  с, а соответствующая спектральная ширина линии порядка  $10^8$  Гц. В лазерах возбужденные атомы вынужденно излучают в фазе, так, что в рубиновых лазерах длительность эффективных волновых цугов оказывается порядка  $10^{-6}$  с, а в газовых лазерах – порядка  $10^{-3}$  с. Соответствующая спектральная ширина линии равна  $10^6$  и  $10^3$  Гц.

Длительность волнового цуга  $\Delta \tau$  и эффективная спектральная ширина  $\Delta \nu$  при гауссовой форме линии связаны соотношением

$$4\pi\Delta\tau\Delta\nu \sim 1.$$

Понятие времени когерентности связано с тем, что при интервалах времени, меньших  $\Delta \tau$ , источник является монохроматическим, и с тем, что в точке пространства существует линейная зависимость или корреляция амплитуд и фаз волнового цуга, соответствующих двум разным моментам времени. При интервалах времени, больших  $\Delta \tau$ , мы имеем два различных волновых цуга и корреляция отсутствует. *Время  $\Delta \tau$  называется временем когерентности.*

Положим  $\lambda = c\Delta \tau$ . Отсюда получим  $\lambda = \frac{c}{\Delta \nu}$ . *Длина  $\lambda$  называется длиной когерентности.*

#### **7.4. Оптика винтовых полей или сингулярная оптика**

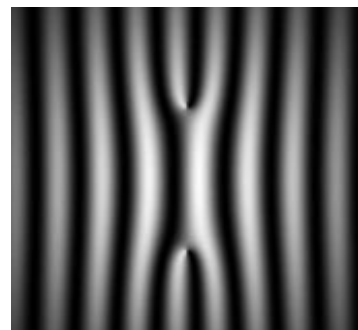
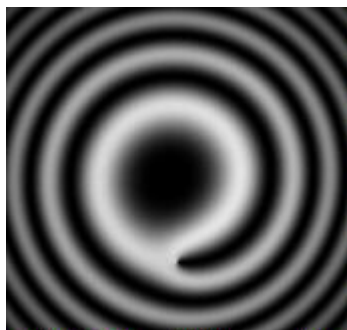
В настоящее время в оптике сформировалась новая область, называемая "оптикой винтовых полей" или "сингулярной оптикой". В ее рамках

рассматриваются свойства оптических вихрей, а также физический механизм их образования. Вихревая пространственно-временная структура многих физических объектов и процессов отражает глубокие фундаментальные свойства материи. Вихревые, а также близкие к ним по форме винтовые или спиралевидные структурные элементы проявляются как на молекулярном уровне, так и в глобальных процессах, происходящих в атмосфере, океане или космосе. Присущи они и ряду оптических явлений. Фактически, волновые вихри свойственны любым волновым явлениям, как классической, так и квантовой природы.

Оптико-физические процессы, вызывающие появление оптических вихрей, весьма разнообразны. Излучение с вихревой структурой может при определенных условиях формироваться в результате интерференции лазерных пучков с исходно регулярным волновым фронтом, при их прохождении через случайно-неоднородные и нелинейные среды, а также через волоконные многомодовые световоды или специальным образом изготовленные голограммы. Кроме того, возможно возбуждение вихревых полей непосредственно в лазерах.

Сингулярные пучки обладают уникальным свойством захватывать, транспортировать и вращать микрочастицы вещества, размеры которых могут варьироваться от единиц до десятков микрон. Используя данное свойство создаются устройства, называемые оптическими пинцетами.

Оптические вихри представляют собой области кругового (циркулярного) движения потока энергии в электромагнитной волне. Для продольного оптического вихря сочетание кругового и поступательного движения электромагнитной волны приводит к образованию геликоидальной поверхности равной фазы (волновая дислокация волнового фронта). При этом волновой фронт имеет везде гладкую волновую поверхность за исключением оси геликоида. Такая форма волновой поверхности обуславливает при соосной интерференции с плоской волной интерференционные полосы в виде спирали или “вилку” интерференционных полос для наклонного падения волн, что однозначно определяет наличие оптического вихря (рис. 7.11).



Интерференционные полосы в виде спирали      “Вилка” интерференционных полос

Рис. 7.11. Вид интерференционных полос при интерференции при наличии оптического вихря

В картине интерференции пучков при наличии винтовой дислокации второго и более высокого порядка наблюдались бы полосы интерференции, расщепленные на четыре и более новых полосы.

Волновой фронт световых пучков, близких по своим свойствам к плоской волне, выглядит как семейство непересекающихся поверхностей. Расстояние между соседними поверхностями равно длине волны. Имеющие место в реальных пучках отклонения волновых фронтов от плоской формы называются оптическими аберрациями. Однако все аберрации, рассматриваемые в классической теории, деформируют волновой фронт без изменения его топологии.

Лазерное излучение характеризуется высокой монохроматичностью и направленностью. Это позволяет для описания его свойств использовать понятие эквифазной поверхности (волнового фронта), во всех точках которой световые колебания имеют одинаковую фазу. Если оптические вихри в лазерном пучке отсутствуют, то ему можно поставить в соответствие систему эквифазных поверхностей, близких по форме к плоскостям (рис. 7.12, *a*). Расстояние между соседними поверхностями равно длине волны  $\lambda$ .

Появление в лазерном пучке оптических вихрей приводит к появлению на поверхности волнового фронта особых точек. В самой особой точке амплитуда световых колебаний обращается в нуль, а значение фазы не определено, поскольку скорость азимутального изменения фазы обращается в бесконечность. При математическом описании такой особенности принято говорить о наличии сингулярности, что, и стало причиной появления упомянутого выше термина "сингулярная оптика". Основное свойство винтовой дислокации состоит в том, что при обходе вокруг нее фаза изменяется на  $2\pi$ . На поверхности волнового фронта может возникать как единичная винтовая дислокация, так и система дислокаций. В зависимости от направления закрутки волнового фронта все винтовые дислокации подразделяются на левые и правые. Появление винтовой дислокации кардинальным образом меняет топологию волнового фронта. Эквифазная поверхность перестает быть многолистной (см. рис. 7.12, *a*), и осуществляется переход к единой поверхности волнового фронта со специфической винтовой структурой (рис. 7.12, *b*).

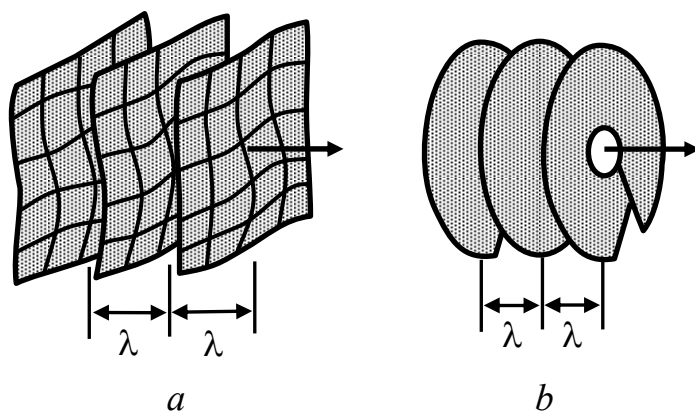


Рис. 7.12. Структура волновых фронтов при отсутствии (*a*) и наличии (*b*) винтовой дислокации, расположенной на оси

Так как направление распространения световой энергии задается вектором, перпендикулярным в каждой точке поверхности волнового фронта, то в окрестности винтовой дислокации будет происходить завихрение энергетического потока.

В окрестности винтовой дислокации амплитуду световых колебаний  $u$  можно с хорошим приближением представить в виде

$$u = Cr \exp(\pm i\alpha),$$

где  $C$  - произвольная константа,  $r$  - расстояние от винтовой дислокации,  $\alpha$  - азимутальный угол. Согласно этой форме, функция, характеризующая распределение фазы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка, входит в мнимый показатель экспоненты. То, что в данном случае эта функция представлена в виде одного множителя  $\alpha$ , свидетельствует о равномерном по азимуту изменении фазы.

Приведенные выше характеристики относятся к дислокациям первого порядка, азимутальное изменение фазы, в окрестности которых составляет  $2\pi$ . Однако физически представляется возможным формирование винтовых дислокаций более высокого порядка. Скорость азимутального вращения фазы у них выше, и изменение фазы за полный обход по азимуту равно  $2\pi l$ , где целое число  $l$  определяет порядок дислокации. Для описания регулярных винтовых дислокаций высоких порядков используется выражение

$$u = Crl \exp(\pm il\alpha).$$

## Методы регистрации ВД

Образование винтовой дислокации на волновом фронте лазерных пучков является чисто фазовым эффектом. Поэтому единственным способом, обеспечивающим надежную идентификацию винтовой дислокации, является способ, основанный на использовании интерферометрической информации (рис. 7.13. *a, b*).

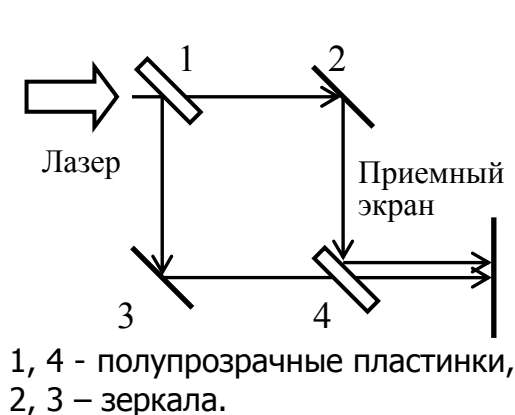


Рис. 7.13. *a*. Схема регистрации винтовых дислокаций, возникающих в лазерном резонаторе на базе интерферометра Маха-Цандера

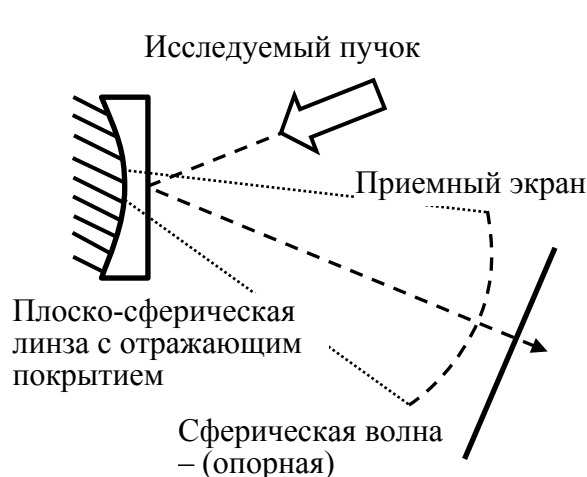


Рис. 7.13. *b*. Схема интерферометра радиального сдвига

Интерферограммы поперечного сечения пучка могут быть получены разными способами. Самым удобным является способ, основанный на регистрации структуры интерференции исследуемого поля с плоской или сферической однородными волнами (естественно, исследуемая и опорная волны должны быть взаимно когерентными).

Рассмотрим интерференционные портреты винтовой дислокации первого и второго порядков. Если в качестве опорной волны взять соосную сферическую волну с амплитудой  $a$  и радиусом кривизны волнового фронта  $R$ , то суммарная комплексная амплитуда поля  $u_{\Sigma}$  в области интерференции будет иметь вид

$$u_{\Sigma} = Cr' \exp(i l \alpha) + a \exp\left(i \frac{\pi r^2}{\lambda R} + i \beta\right),$$

где  $\beta$  - расстройка по фазе между интерферирующими волнами. Присутствующий в показателе второй экспоненты фактор  $\pi r^2 / (\lambda R)$  определяет фазовый сдвиг между сферической и плоской волнами.

Переходя к безразмерной величине радиуса-вектора  $r' = \sqrt{\pi r^2 / \lambda R}$  и приравнявая к нулю действительную и мнимую части можно установить, что темные линии на регистрируемой интерференционной картине будут удовлетворять условию

$$r' = \sqrt{l \alpha - \beta}.$$

Параметр  $\beta$  не влияет на общую структуру интерферограмм. Его изменение приводит лишь к повороту спиралей вокруг оси. Если винтовая дислокация смещена относительно оси опорной сферической волны, то структура интерферограмм меняется.

## **Механизм формирования вихревых лазерных полей**

В настоящее время установлено, что излучение с вихревой структурой может при определенных условиях формироваться в результате интерференции лазерных пучков с исходно регулярным волновым фронтом, при их прохождении через случайно-неоднородные и нелинейные среды, а также через волоконные световоды или специальным образом изготовленные голограммы. Кроме того, возможно возбуждение вихревых полей непосредственно в лазерах.

Наиболее часто волновые дислокации волнового фронта лазерных пучков, обуславливающие вихревую структуру светового поля, наблюдаются при распространении излучения через оптические элементы и передающие среды со случайными неоднородностями показателя преломления. Так, волновые дислокации могут быть зарегистрированы на волновом фронте в результате прохождения достаточно больших расстояний в атмосфере. В последнем случае возникновение оптических неоднородностей связано с развитием турбулентных образований в приземном слое атмосферы, происходящим из-за наличия температурных градиентов и конвективных потоков.

Под влиянием флуктуаций показателя преломления вдоль трассы в световой волне возникают изменения фазы, связанные с ускорением или замедлением



скорости распространения различных участков волнового фронта. Возмущения эквифазной поверхности вызывают отклонение локальных нормалей к волновому фронту от первоначального направления распространения волны. Если изгибы эквифазной поверхности значительны, то нормали пересекаются, вызывая интерференцию различных участков волнового фронта в плоскости наблюдения. Интерференция, в свою очередь, приводит к глубокой хаотической модуляции распределения амплитуды и фазы, в результате которой распределение интенсивности приобретает вид многочисленных, хаотически расположенных и имеющих неправильную форму световых пятен - спеклов. При этом будут возникать предпосылки для возникновения на границах между спеклами точек с нулевым значением амплитуды, вокруг которых будет происходить завихрение светового поля.

Количество винтовых дислокаций напрямую связано с интенсивностью турбулентных процессов в атмосфере, которую можно регистрировать по уровню локальных флуктуаций показателя преломления. Эта связь проявляется настолько отчетливо, что были предложены и нашли практическую реализацию методы диагностики турбулентных состояний атмосферы на основе регистрации и подсчета числа винтовых дислокаций.

## **7.5. Световое давление**

Предположение о том, что свет может оказывать механическое давление на вещество, впервые высказал немецкий астроном Иоганн Кеплер в XVII веке. Это предположение он сделал, исходя из результатов своих наблюдений за хвостами комет. Корпускулярная теория света, предложенная Ньютоном, сделала идею светового давления более правдоподобной и стимулировала многочисленные попытки его экспериментального измерения.

В 1873 г. Джеймс Максвелл рассчитал значение светового давления с помощью своей теории электромагнитных явлений. Этот эффект был экспериментально подтвержден в 1910 г. российским физиком Петром Лебедевым.

Одним из значимых достижений лазерной физики является неконтактная манипуляция микрочастицами лазерными градиентными полями. Впервые возможность захвата и перемещения микрочастиц сфокусированным лазерным излучением была продемонстрирована А. Эшкиным и соавторами в 1970 г.

В настоящее время в биологии и медицине широко используется так называемый «лазерный пинцет». Механизм его действия основан на влиянии давления света и дипольных градиентных сил на диэлектрические микрочастицы в поле с пространственным градиентом интенсивности. С помощью лазерного пинцета реализованы захват вирусов и бактерий, индуцированный синтез клетки, микрооперации в иммунологии и молекулярной генетике, исследовано движение хромосом. Также с помощью лазерного пинцета исследуют эластичные свойства биообъектов, например, молекул ДНК, эритроцитов.

Особый интерес для биологических и медицинских применений представляет не только взаимодействие сфокусированного пучка с одиночной

частицей, но и воздействие излучения с периодической пространственной модуляцией интенсивности на ансамбль частиц. В этом случае можно реализовать пространственную модуляцию концентрации частиц с разделением их по сортам. Кроме того, отсутствие острой фокусировки пучка на отдельной частице делает этот вид оптического захвата менее травматичным.

Применение светового давления в измерительных системах основано на возможности приложения к микрообъектам фиксированных механических усилий, удерживающих либо деформирующих исследуемый объект.

### **Физические принципы оптического микроманипулирования**

Рассмотрим объекты, представляемые в виде маленьких диэлектрических сфер, взаимодействующих с электрическим полем, созданным световой волной, за счёт индуцированного на сфере дипольного момента. В результате взаимодействия этого диполя с электрическим полем электромагнитной волны, объект перемещается вдоль градиента электрического поля. Кроме градиентной силы, на объект также действует сила, вызванная давлением (отражением) света от его поверхности. Эта сила толкает сферу по направлению распространения света.

Для математического анализа процессов оптического манипулирования микрочастицами используются два метода. В случае, когда размер частиц существенно (в 10 и более раз) превышает длину волны излучения, используют лучевой подход, основанный на законах геометрической оптики. В случае, когда размер частиц меньше или сравним с длиной волны излучения, используют приближение электрического диполя.

#### **Приближение электрического диполя**

В случаях, когда диаметр исследуемой частицы значительно меньше, чем длина волны света ( $d \ll \lambda$ ), и удовлетворяется условие рассеяния Рэлея, частицу можно рассмотреть как точечный диполь в неоднородном электромагнитном поле. Сила, действующая на заряжённую частицу в электромагнитной области, известна как сила Лоренца,

$$\vec{F}_1 = q \left( \vec{E}_1 + \frac{d\vec{x}_1}{dt} \times \vec{B} \right)$$

Сила, действующая на диполь, вычисляется как сумма сил, действующих на отдельные заряды

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \left( \vec{E}_1(x, y, z) - \vec{E}_2(x, y, z) + \frac{d(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{dt} \times \vec{B} \right)$$

После несложных преобразований и с учетом уравнений Максвелла выражение (2) можно записать в виде

$$\vec{F} = \alpha \left[ \frac{1}{2} \nabla E^2 + \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{B}) \right],$$

где  $\alpha$  – поляризуемость частицы. При выводе последнего выражения предполагается, что поляризация частицы является линейной функцией напряженности поля, т.е.  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ .

Второе слагаемое – производная по времени величины, которая связана через постоянный множитель с вектором Пойнтинга, описывающего мощность излучения проходящего через единичную площадку. Предполагая, что мощность лазера не зависит от времени, производная этого слагаемого — ноль, и сила запишется в виде

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \alpha \nabla E^2$$

Квадрат величины электрического поля равен интенсивности луча как функция координат. Поэтому результат указывает, что сила, действующая на диэлектрическую частицу, в приближении точечного диполя, является пропорциональной градиенту интенсивности пучка. Другими словами, описанная здесь сила приводит к притяжению частицы в область с самой высокой интенсивностью.

Данное приближение справедливо для Рэлеевских частиц, размер которых удовлетворяет условию  $d < \lambda/20$ .

### Лучевой подход

В рамках лучевой модели падающее излучение рассматривается в виде набора отдельных лучей, каждый из которых имеет собственное направление распространения, собственную интенсивность и, следовательно, собственный момент импульса. В оптически однородной среде эти лучи распространяются прямолинейно, и их распространение может быть описано в соответствии с законами геометрической оптики (рис. 7.14).

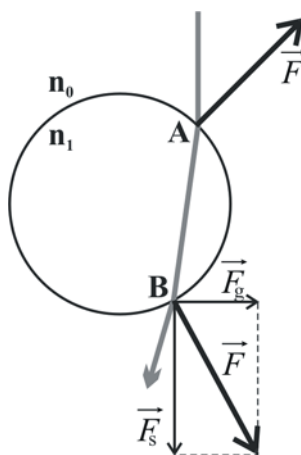


Рис. 7.14. Возникновение механических усилий при прохождении луча через диэлектрическую сферу

При падении луча под углом  $\theta_i$  на поверхность раздела двух диэлектриков с показателями преломления  $n_0$  и  $n_1$  энергия луча распределяется между преломленным и отраженными лучами.

Угол преломления определяется законом Снелля,  $n_0 \cdot \sin \theta_i = n_1 \cdot \sin \theta_t$ , где  $n_1$  – показатель преломления частицы,  $n_0$  – показатель преломления окружающей среды,  $\theta_t$  – угол преломления. Энергетические коэффициенты отражения и преломления определяются по формулам Френеля для излучения, поляризованного параллельно (a) и перпендикулярно (b) плоскости падения:

$$\rho_1 = \frac{tg^2(\theta_i - \theta_t)}{tg^2(\theta_i + \theta_t)}, \quad \tau_1 = \frac{\sin(2\theta_i) \cdot \sin(2\theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cdot \cos^2(\theta_i - \theta_t)}, \quad (a)$$

$$\rho_2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}, \quad \tau_2 = \frac{\sin(2\theta_i) \cdot \sin(2\theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \quad (b)$$

Каждый из лучей имеет определенный момент импульса, модуль которого пропорционален энергии луча  $E$  и показателю преломления среды, в которой он распространяется:

$$|\vec{p}| = \frac{E \cdot n}{c},$$

где  $c$  – скорость распространения света в вакууме. Изменение момента импульса, возникающее на поверхности раздела двух сред

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_i - \vec{p}_r - \vec{p}_t,$$

где  $\vec{p}_i$  – момент падающего луча,  $\vec{p}_r$  – момент отраженного луча,  $\vec{p}_t$  – момент преломленного луча. Разность моментов компенсируется механической силой, приложенной в точке падения. Направление вектора этой силы определяется направлением вектора разности моментов, а модуль определяется из соотношения

$$|\vec{F}| = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta E \cdot n}{\Delta t \cdot c} = \frac{P \cdot n}{c}.$$

Пройдя сферу, луч вновь попадает на границу раздела двух сред, от которой часть излучения отражается, а другая часть, преломившись, выходит из сферы, если угол падения луча на нижнюю часть сферы не превосходит критического угла, при котором реализуется эффект полного внутреннего отражения. В точке выхода луча также возникает механическая сила, компенсирующая изменение импульса луча вследствие его преломления и отражения.

На практике данное приближение может быть использовано при выполнении критерия

$$2\pi a/\lambda \leq 20.$$

Одним из наиболее востребованных направлений, в которых световое излучение применяется для манипуляции частицами, размер которых позволяет использовать для математического описания подход лучевой оптики, являются исследования в биологии и медицине.

При рассмотрении сил светового давления, действующих на частицу, обычно выделяют две компоненты вектора (рис. 7.15): компоненту, действующую вдоль направления распространения излучения – силу рассеяния  $\vec{F}_s$  (англ. scattering force), и компоненту, действующую в направлении,

перпендикулярном направлению распространения излучения – градиентную силу  $\vec{F}_g$  (англ. gradient force).

Следует заметить, что силы рассеяния и градиентные силы являются следствием преобразования момента силы падающего луча, в моменты силы преломленного и отраженного лучей. Эти силы возникают непосредственно в месте, где происходит отражение и преломление, то есть на границе раздела двух сред – внешней среды и материала объекта. В ряде случаев, при рассмотрении и описании захвата и транспортировки микрообъектов, можно считать эти объекты недеформируемыми. В таких случаях силы светового давления, возникающие на поверхности частицы, могут быть сложены методом параллельного переноса, и результирующая сила может считаться приложенной в центре масс объекта.

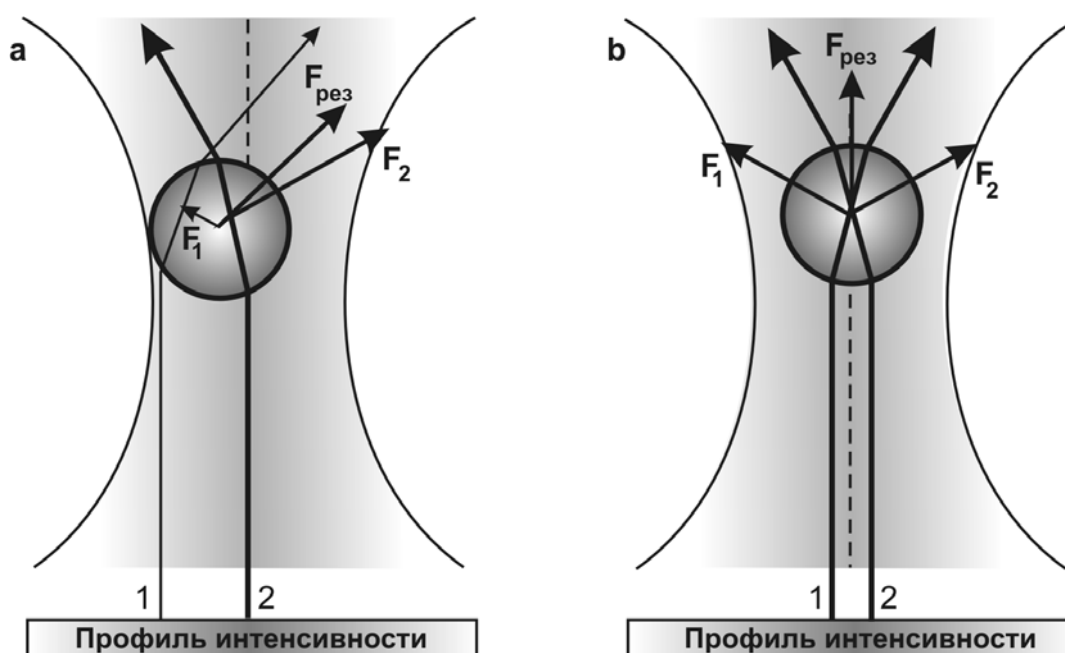


Рис. 7.15. Втягивание частицы, имеющей показатель преломления, больший, чем у окружающей среды, на ось лазерного пучка

Рассмотрим вначале случай попадания объекта, имеющего показатель преломления, больший, чем у окружающей среды, в поле гауссова пучка лазерного излучения. Пусть объект смещен относительно оси пучка (рис. 7.15. а). За счет имеющегося градиента интенсивности в поперечном сечении пучка сила  $F_2$ , обусловленная преломлением и отражением луча 2, имеющего большую интенсивность, оказывается, по величине больше силы  $F_1$ .

Градиентные составляющие сил светового давления, действующие на правую и левую части объекта, в данном случае нескомпенсированы, и результирующая этих сил стремится переместить частицу в направлении оси пучка. При нахождении объекта на оси пучка градиентные силы скомпенсированы, и частица оказывается зафиксированной на оси пучка (рис. 7.15. б). При этом результирующая сила имеет только одну составляющую – это сила рассеяния, толкающая частицу в направлении распространения светового излучения.

Направление перемещения микрообъекта в поле оптического излучения существенно зависит от соотношения показателей преломления объекта и окружающей среды. Рассмотрим случай падения светового излучения на диэлектрическую сферу с показателем преломления, большим, чем у окружающей среды (рис. 7.16).

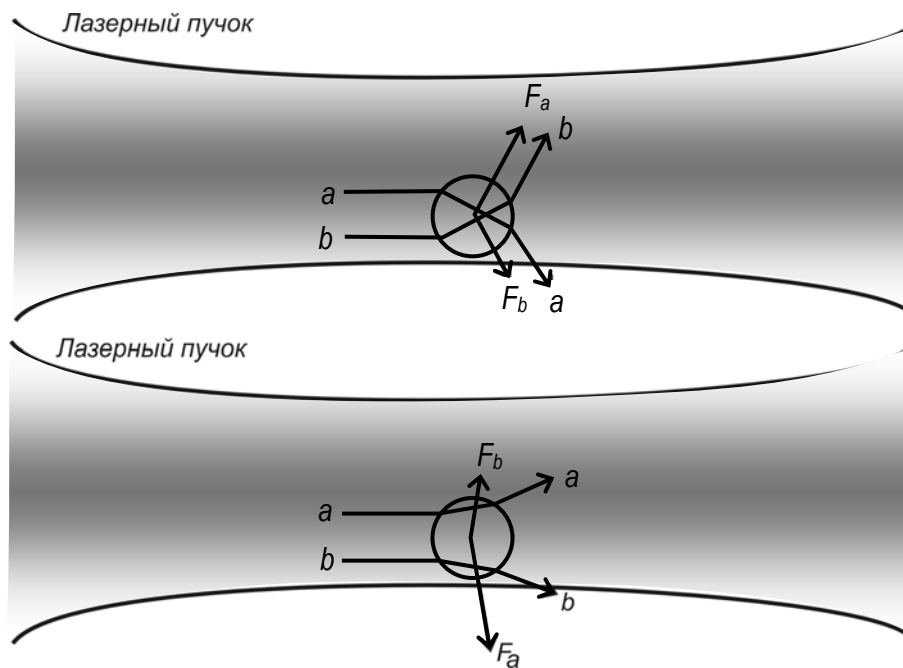


Рис. 7.16. Втягивание или выталкивание частицы из лазерного пучка в зависимости от относительного показателя преломления частицы

Рассмотрим типичную пару световых лучей, а и б, расположенных симметрично по отношению к центру сферы. Пренебрежем в данном случае поверхностным отражением и рассмотрим только прошедшую часть каждого луча, так как часто это большая часть, и она дает основной вклад в силу. Лучи искривляются таким образом, что возникают две силы  $F_a$  и  $F_b$ , направленные вдоль изменения импульса лучей. Так как луч а сильнее луча б (плотность мощности излучения выше вблизи оси гауссова пучка выше, чем на периферии), то и сила  $F_a$  больше силы  $F_b$  (рис. 7.16, сверху), и следует ожидать появления поперечной силы, толкающей сферу, обладающую высоким показателем преломления, по направлению к центру пучка, где плотность мощности излучения максимальна.

Если же сфера имеет показатель преломления более низкий, чем окружающая среда, силы  $F_a$  и  $F_b$  меняются местами, и такая сфера выталкивается с оси пучка, т.е. из области с максимальной интенсивностью излучения (рис. 7.16, снизу).

Наряду с широким использованием остро сфокусированного излучения, в ряде случаев применяется манипуляция микрочастицами, помещенными в оптические поля с пространственной модуляцией интенсивности излучения, не имеющими областей острой фокусировки. Применение таких оптических полей

позволяет оказывать воздействие одновременно на большие группы объектов, вызывая их упорядочивание и пространственное разделение.

Помимо возможности непосредственного управления большими группами микрочастиц, в том числе биологических, применение градиентных оптических полей позволяет производить измерение и селекцию микрообъектов в зависимости от их механических и оптических свойств.

В отличие от схемы оптического пинцета, в которой за захват и удержание частицы отвечают как силы рассеяния, так и градиентные силы, в полях, подобных интерференционным, захват и перемещение частиц осуществляется только за счет градиентных сил.

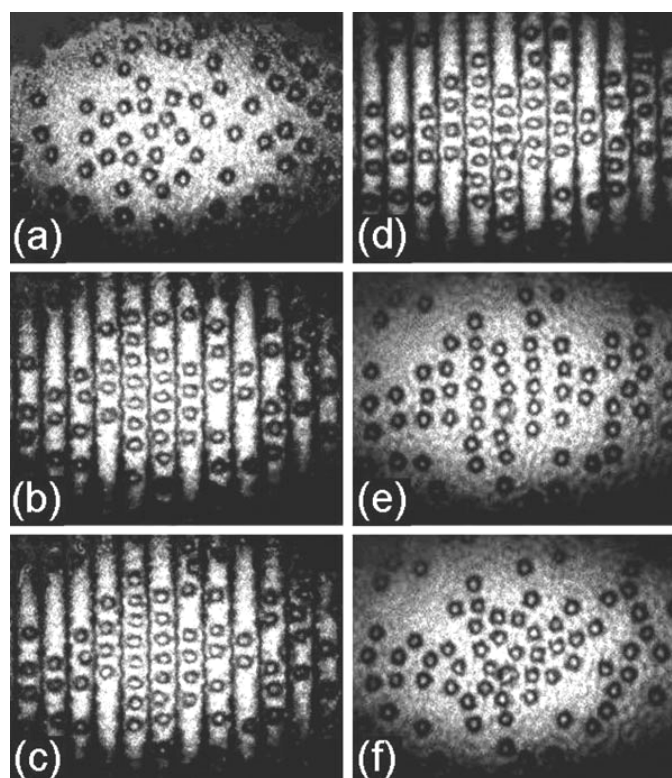


Рис. 7.17. Воздействие периодически модулированного излучения на группу полистирольных шариков: до воздействия (a), во время воздействия (b, c, d) и после воздействия (e, f)

На рис. 7.17 приведены фотографии группы полистирольных шариков диаметром 8,2 мкм, находящихся в водной среде, до воздействия интерференционного распределения интенсивности, во время воздействия и после него. Мощность излучения в ходе эксперимента не превышала 25 мВт.

Для устойчиво захвата и перемещения частицы в градиентном оптическом поле необходимо, чтобы энергия взаимодействия оптического поля с частицей превышала тепловую энергию частицы  $kT$ . Из этого условия следует ограничение на минимальный размер сферической частицы, увлекаемой градиентом интенсивности поля, интенсивность которого изменяется от 0 до I:

$$r > \sqrt[3]{\frac{ckT}{3\pi^3\alpha I}},$$

где  $r$  – радиус частицы,  $c$  – скорость света.

Таким образом, становится возможным использование градиентных для изменения размеров и осуществление селективной пространственной локализации микрочастиц в зависимости от их размера.



## 8. Оптика спеклов.

### 8.1. Понятие спекл, объективная и субъективная спекл-картины. Основные свойства спекл-картины, условия формирования

При освещении высоко когерентным пучком большой области оптически очень шероховатой поверхности формируется, так называемая, нормально развитая спекл-картина. Спекл (*англ.* speckle [spekl] пятнышко, крапинка). Её статистические свойства не зависят от детальных характеристик микрорельефа поверхности. Такая особенность спекл-картин, обусловленных лазерным излучением, была обнаружена вслед за изобретением лазера.

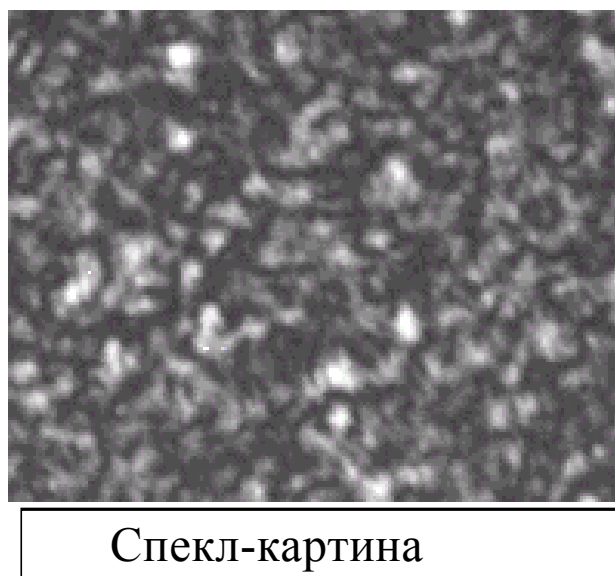


Рис. 8.1. Спекл-картина, получаемая при освещении лазером сильно шероховатой поверхности

Оказалось, что изображение отражающего (пропускающего) объекта, освещенного когерентным излучением, представляет сложную гранулярную структуру, не имеющую явной связи с микроскопическими свойствами освещаемого объекта. Большинство отражающих (пропускающих) поверхностей экстремально шероховаты по сравнению с длиной волны источника излучения.



Рис. 8.2. Модель рассеяния на шероховатой поверхности

Можно считать, что основной вклад в рассеяние вносят малые участки поверхности с центрами в зеркально отражающих точках. С увеличением крутизны шероховатостей и величины освещаемой области число точек излучения возрастает.

Волна, отраженная от такой поверхности состоит из "вкладов" от большого числа малых участков поверхности, которые можно считать независимыми рассеивающими областями.

Распространение этого отраженного (прошедшего) излучения до области наблюдения приводит к тому, что в заданной точке наблюдения складываются рассеянные компоненты каждая со своей задержкой. Интерференция этих дефазированных, но когерентных волн, приводит к гранулярной спекл-картине.

Иными словами, **спеклы - это интерференционная картина нерегулярных волновых фронтов, образующаяся при падении когерентного излучения на сильно шероховатую поверхность.**

### Объективные и субъективные спеклы

Различают объективные и субъективные спеклы. Объективная спекловая картина формируется во всем пространстве перед освещаемой поверхностью. Субъективная спекловая картина возникает при отображении рассеивающей поверхности на экран с помощью оптической системы. Объективную спекловую картину можно зарегистрировать если в плоскости наблюдения расположить фотопленку и засветить ее спекловой картиной. Но если сфотографировать эту же картину с помощью фотоаппарата, то на фотопленке получим субъективную картину т.к. ее параметры будут уже зависеть от параметров объектива фотоаппарата.

Рассмотрим механизм образования спеклов на примере изображения точечного источника.

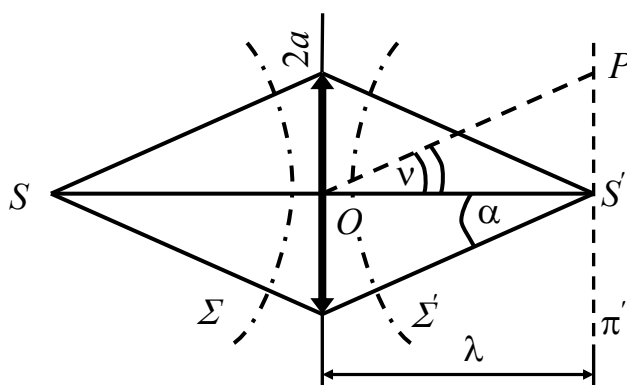


Рис. 8.3. Изображение точечного источника света

Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника, преобразуется в сходящуюся сферическую волну с центром  $S'$  - геометрическое изображение точечного источника  $S$ .

Структура пятна, вид дифракционной картины, зависят от формы отверстия, образуемого оправой объектива. Пусть отверстие круглое, а его диаметр  $2a$ ,

тогда в плоскости изображения  $\pi$  амплитуда дается Фурье-преобразованием круговой функции. Амплитуда в точке  $P$  дается функцией Эйри

$$f(u) = \frac{2J_1(u)}{u}, \quad u = ka\theta; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

угловой радиус первого кольца  $\theta = \frac{1.22\lambda}{2a}$ .

Сместим плоскость наблюдения из  $\pi'$  в плоскость  $\pi''$ , отстоящую на расстояние  $\delta\lambda$ ,  $\delta\lambda \ll OS'$ .

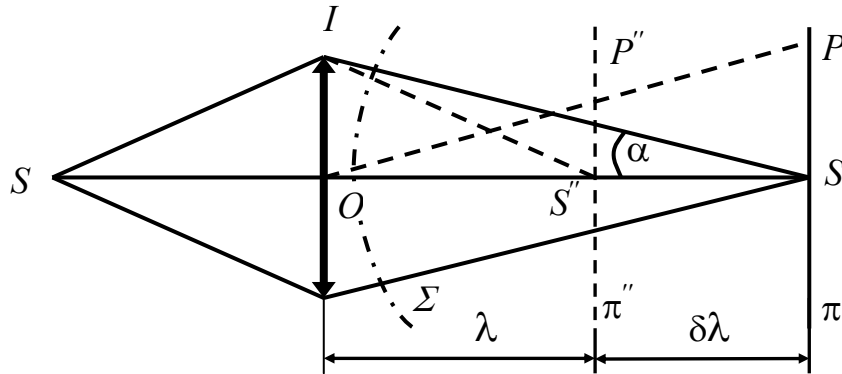
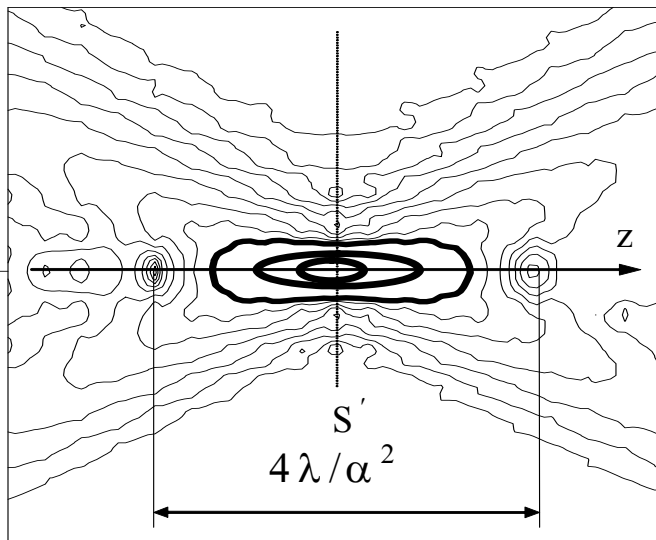


Рис. 8.4. Изображение точечного источника света при дефокусировке

Волны, дифрагированные различными точками волновой поверхности  $\Sigma$ , приходят в  $S'$  в фазе, а в точку  $S''$  с разными фазами. Максимальная разность хода в точке  $S''$   $\Delta = IS'' - OS''$ . Можно показать, что

$$\Delta = \delta\lambda \frac{\alpha^2}{2}.$$

Этой разностью хода и объясняется снижение качества изображения. Если требуется, чтобы дифракционная картина в точке  $S''$  практически не отличалась от дифракционной картины в точке  $S'$ , то величина  $\Delta$  должна быть значительно меньше  $\lambda$ .



$$\Delta = \delta\lambda \frac{\alpha^2}{2} \ll \lambda \Rightarrow \delta\lambda \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Рис. 8.5. Линии равной интенсивности в окрестности изображения точечного источника

На рисунке 8.5 приведено распределение интенсивности дифрагировавшего излучения в окрестности изображения  $S''$  (показаны линии изофот). Распределение интенсивности вдоль оптической оси (ось  $z$ ) описывается функцией

$$f(u) = \left[ \frac{\sin(u/4)}{u/4} \right]^2, u = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha^2 z$$

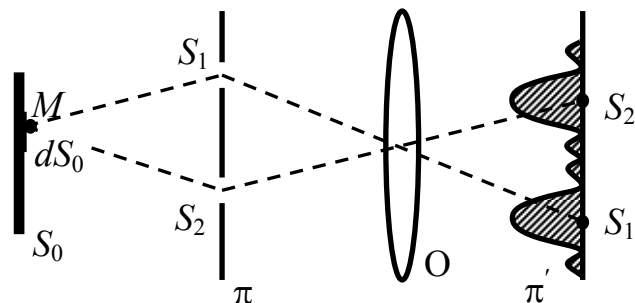
Первый нуль интенсивности на оси получается при  $z = \pm 2\lambda / \alpha^2$  от фокуса. Если считать допустимой потерю интенсивности в 20%, то допуск на положение фокальной плоскости  $\Delta z$  равен приблизительно  $\pm \lambda / 2\alpha^2$ .

Параметры фокального объема			
длина	$\frac{4\lambda}{\alpha^2}$	ширина	$1.22 \frac{\lambda}{\alpha}$

Наибольшая плотность энергии локализована в объеме, напоминающем по форме сигару. Отсюда следует, что чем больше угол  $\alpha$ , тем меньше резкость изображения.

### Изображение двух монохроматических точечных источников света

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  очень маленькие отверстия в непрозрачном экране. Экран освещается монохроматическим, некогерентным, однородным источником. Тогда можно считать, что эти отверстия практически представляют два одинаковых точечных источника (рис. 8.6).



Сложение сигналов  $S_1'$  и  $S_2'$

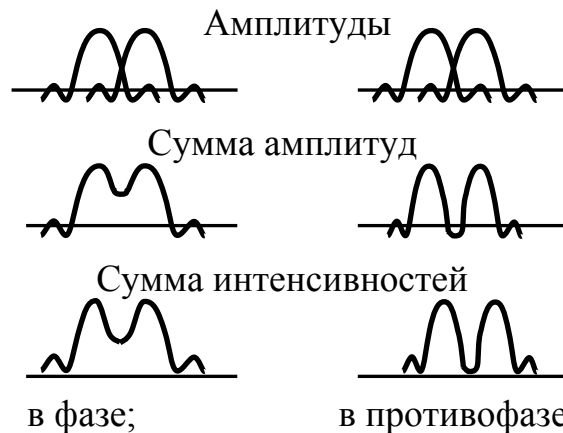


Рис. 8.6. Распределения интенсивности и амплитуды поля в зависимости от соотношения фаз волн

**Первый случай:** на экран с отверстием падает свет лишь от элемента  $dS_0$  с центром в точке  $M$ .

Волны дифрагировавшие на отверстиях  $S_1$  и  $S_2$  имеют разность хода  $D=MS_1 - MS_2$  и соответственно этому разность фаз  $\varphi = 2\pi\Delta/\lambda$ .

Точечные отверстия, освещаемые элементом источника  $dS_0$  можно рассматривать как когерентные. Это следует из теоремы Ван Циттерта-Цернике. При стремлении размера источника к нулю, интервал корреляции стремится к бесконечности.

Чтобы найти вид суммарной дифракционной картины в плоскости  $\pi$  нужно сложить амплитуды световых колебаний, учитывая их разность фаз. Рассмотрим два случая взаимного расположения источника и отверстий с учетом того, что волны приходят в плоскость  $\pi$  в фазе и в противофазе.

Таким образом, видим, что результат существенным образом зависит от соотношения фаз суммируемых волн.

**Второй случай:** два отверстия  $S_1$  и  $S_2$  освещаются одновременно двумя элементами поверхности источника  $S_0$   $dS_0^1$  и  $dS_0^2$  для которых сдвиг по фазе пусть также составляет  $0$  и  $\pi$ .

В этом случае для получения результирующего распределения нужно сложить интенсивности, поскольку разные элементы поверхности источника не являются когерентными между собой.

**Третий случай:** на экран с отверстиями падает излучение от всей поверхности источника  $S_0$ .

Если разбить поверхность  $S$  на множество элементов  $dS$  и повторить рассуждения, то распределение интенсивности в плоскости  $\pi'$  будет иметь такой же вид, как и при суммировании интенсивностей для двух дифракционных изображений отверстий  $S_1$  и  $S_2$ .

## **Выводы:**

### **1. Когерентные источники**

Распределение амплитуды в плоскости  $\pi'$  дается сверткой функции амплитуды дифракционной картины, создаваемой объективом  $O$ , с двумя дельта-функциями, соответствующими двум геометрическим изображениям  $S'_1$  и  $S'_2$ .

### **2. Некогерентные источники**

Распределение интенсивности в плоскости  $\pi'$  представляет собой свертку функции интенсивности дифракционной картины, создаваемой объективом  $O$ , с теми же дельта-функциями.

## Изображение большого числа монохроматических точечных источников, расположенных хаотически

В экране  $\pi$  имеется много одинаковых отверстий, расположенных хаотически (рис. 7.7).

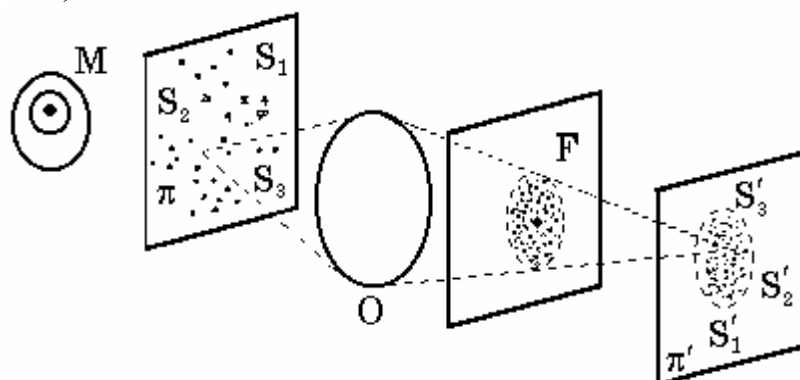


Рис. 8.7. Изображение большого числа хаотически расположенных источников

**Первый случай:** отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. расположены хаотически и освещаются только одним элементом  $dS_0$  с центром в точке  $M$ . Они играют роль когерентных источников излучения. Каждому из них в плоскости изображения соответствует дифракционная картина. Для нахождения суммарной амплитуды поля в плоскости изображения  $\pi'$  их надо просуммировать с учетом фазы.

**В результате суперпозиции возникает очень сложная система отдельных пятен, размер наименьших из которых примерно равен диаметру дифракционного пятна, формируемого объективом  $O$  при его освещении точечным источником излучения** (рис. 8.8).

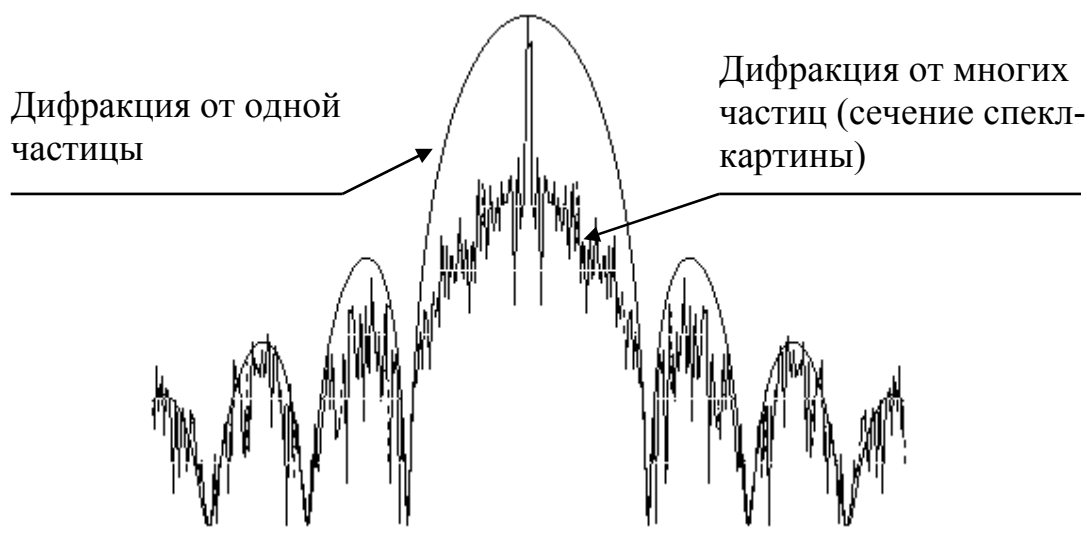


Рис. 8.8. Сечение дифракционной картины при дифракции на одной и на множестве одинаковых частиц

Это и есть **спекл-структура**.

Используя понятие дельта-функции, говорят, что *спеклы представляют собой результат свертки амплитуды дифракционной картины, формируемой объективом  $O$ , со всеми дельта-функциями, соответствующими геометрическим изображениям  $S'_1, S'_2, S'_3$  и т.д. источников  $S_1, S_2, S_3$  и т.д.*

Механизм, объясняющий формирование спекл, можно пояснить, рассматривая дифракцию на отверстии и на двух частицах, расположенных по краям отверстия. При дифракции на отверстии размер центрального дифракционного пятна, где сосредоточена практически вся дифрагированная энергия, по порядку равен  $\varepsilon \sim \lambda/\alpha$ . Размер наименьшего спекл примерно равен диаметру дифракционного пятна, формируемого объективом.

Ширина полос Юнга, образуемая, при дифракции на двух разнесенных отверстиях (частицах) определяется расстоянием между частицами, а при их расположении на расстоянии равном размеру отверстия (экрана) они дают практически такой же размер (период) интерференционной полосы, что и размер дифракционного пятна.

Предполагается, что размер частиц много меньше размера отверстия.

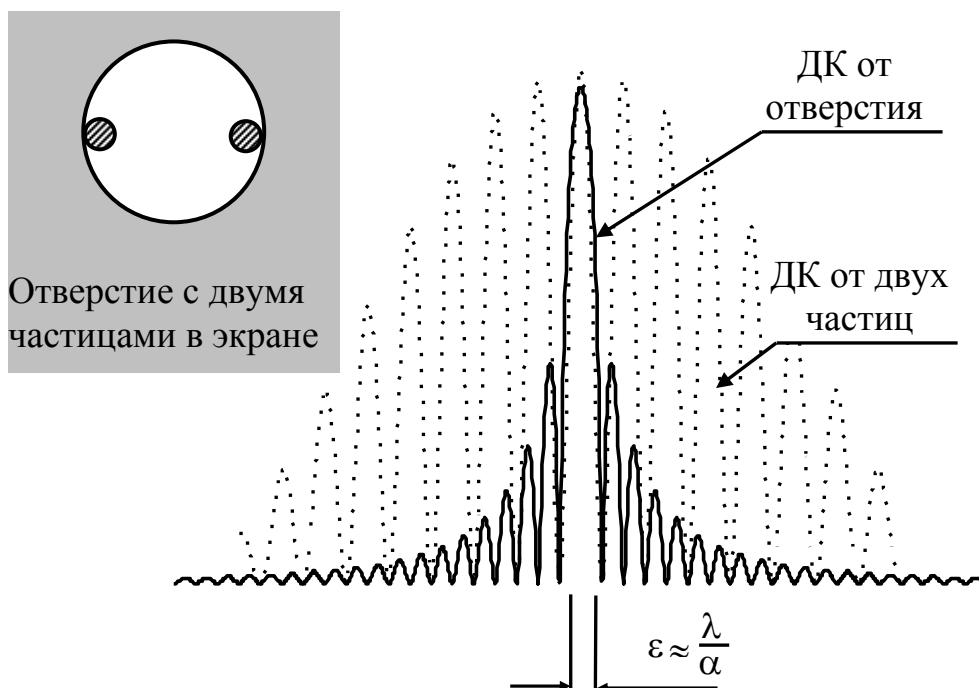


Рис. 8.9. Сечения дифракционной картины соответствующие дифракции на отверстии и на двух малых частицах, расположенных по краям отверстия

Размер минимального пятна, соответствующего центральному дифракционному пятну, условно определяемый на половинном уровне, примерно равен  $\varepsilon \approx \lambda/\alpha$ . Размер пятна по минимумам  $\varepsilon \approx 2\lambda/\alpha$ .

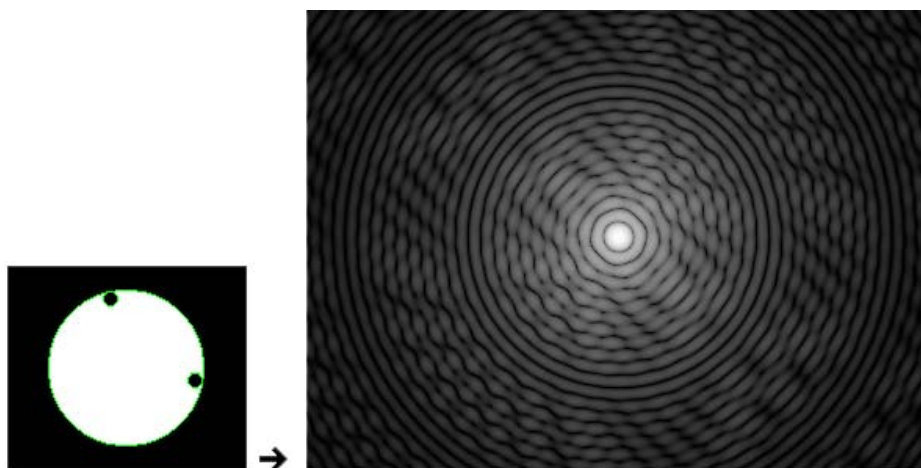


Рис. 8.10. Вид дифракционной картины при дифракции на круглой апертуре и на двух маленьких частицах, расположенных по краям апертуры

**Второй случай:** Если увеличить размеры участка  $dS_0$ , освещающего отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д., то источники  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. станут частично когерентными, и контраст спеклов уменьшится.

А если отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. осветить протяженным источником  $S_0$  то контраст спеклов уменьшиться и в конечном итоге при значительном увеличении размеров источника он будет стремиться к нулю. Это в частности следует из теоремы Ван Циттерта-Цернике - при увеличении размеров источника интервал корреляции уменьшается.

Если источники некогерентны, то берется такая же **свертка интенсивности дифракционной картины**

### Спектр большого числа когерентных точечных источников

Точечный источник, расположенный на бесконечности освещает экран  $\pi$ , в котором имеется множество малых отверстий  $S_1, S_2, S_3$  и т.д.

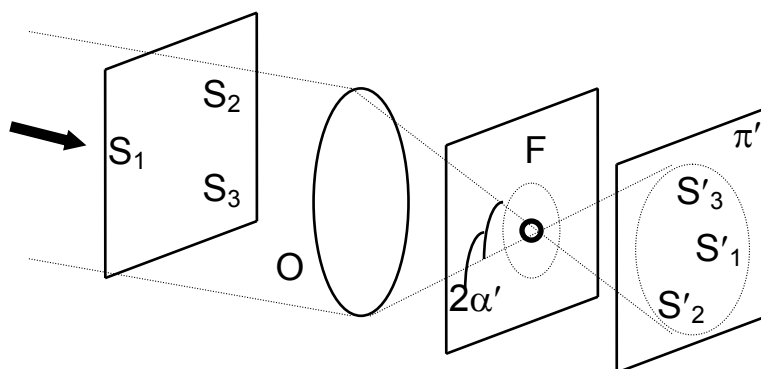


Рис. 8.11. Спектр и изображение большого числа хаотически расположенных источников



Отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. выступают в роли когерентных источников. Нас интересует дифракционная картина в фокальной плоскости  $F$  объектива  $O$ . Она представляет собой Фурье-образ системы точечных источников.

**Основным отличием структур поля в фокальной плоскости и в плоскости изображения является наличие очень яркого центрального пятна в фокальной плоскости.**

Его появление обязано синфазному сложению волн, испускаемых всеми источниками  $S_1, S_2, S_3 \dots$  в области фокуса объектива.

В произвольной точке фокальной плоскости, фазы волн, посылаемых источниками  $S_1, S_2, S_3$  и т.д., принимают любые значения в интервале от 0 до  $2\pi$ . Вследствие таких флюктуаций фаз волн, интерферирующих в фокальной плоскости, возникает пятнистая структура.

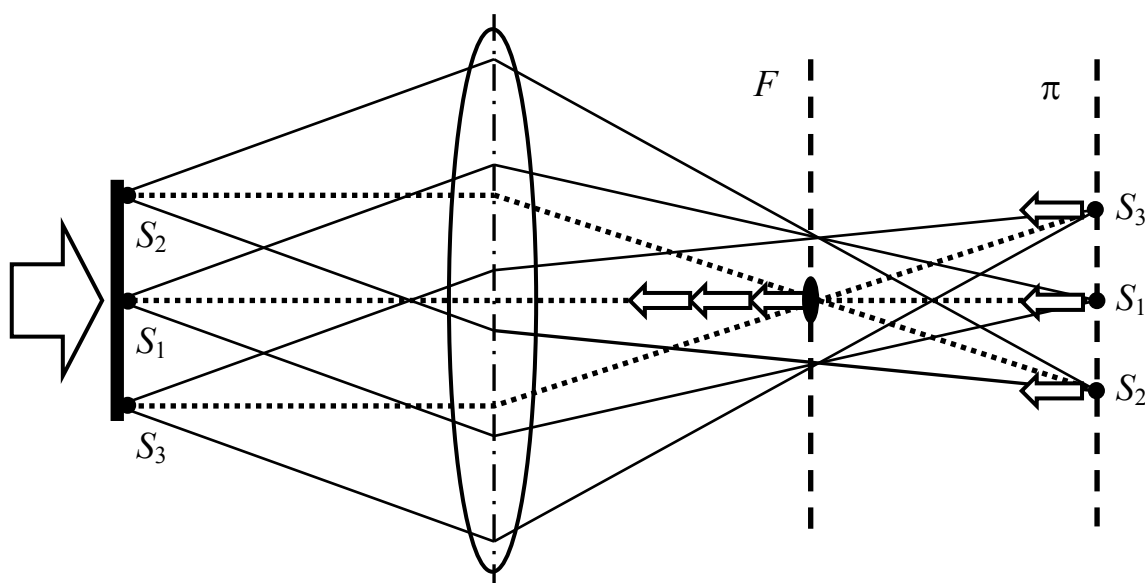


Рис. 8.12. Спеклы в фокальной плоскости и в плоскости изображения

Спеклы, наблюдаемые в фокальной плоскости и в плоскости изображения, отличаются по происхождению друг от друга.

В фокальной плоскости размер наименьшего из них по порядку такой же величины как и диаметр центрального пятна дифракционной картины, обусловленный дифракцией на объективе  $O$  и наблюдаемый в фокальной плоскости.

В плоскости  $\pi'$  размер дифракционных пятен определяется угловым диаметром  $2\alpha$  объектива  $O$ . В фокальной плоскости размер дифракционных пятен определяется угловым диаметром  $2\alpha'$ . Поскольку  $\alpha' > \alpha$ , спекл-структура в плоскости  $F$  будет более тонкой, чем в плоскости  $\pi'$ .

На практике наиболее часто встречается случай, когда источники  $S_1, S_2, S_3 \dots$  имеют конечные размеры. Если их форма приблизительно одинакова, и они расположены хаотически и произвольно ориентированы, то распределение интенсивности в плоскости в фокальной плоскости будет промодулировано дифракционной картиной, создаваемой каждым из этих отверстий в

отдельности. В центре дифракционной картины имеется пик интенсивности, угловой размер которого определяется дифракцией на объективе  $O$  при его освещении точечным источником. Если число источников равно  $N$ , то интенсивность в центре пропорциональна  $N^2$ .

Практическим примером получения такой дифракционной картины является дифракция на мазке крови (рис. 8.13). Характерный размер эритроцита 7-8 мкм, а размер освещающего пучка лазера около 1000 мкм, так что в освещенной зоне оказывается несколько сотен клеток.

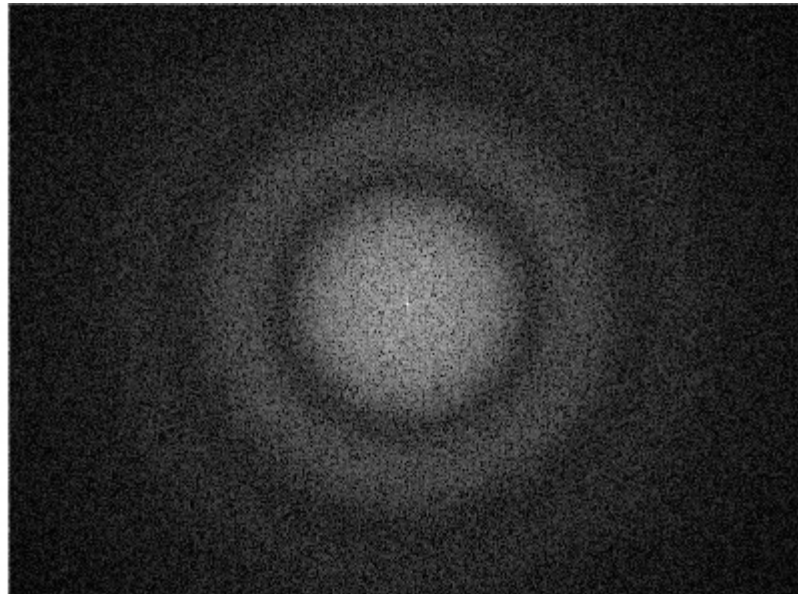


Рис. 8.13. Фотография дифракционной картины на мазке крови (центральный спектр экранирован)

### **Пространственный спектр большого числа когерентных точечных источников, образующих идентичные, одинаково ориентированные и хаотически расположенные пары**

Пусть в экране  $\pi$  имеются совершенно одинаковые малые отверстия, объединенные в пары. Расстояние между двумя отверстиями одной пары одинаково для всех пар и равно  $\xi_0$ . Прямые, соединяющие отверстия одной пары параллельны одному и тому же выделенному направлению и, следовательно, параллельны друг другу. Пары отверстий расположены в плоскости  $\pi$  хаотически.

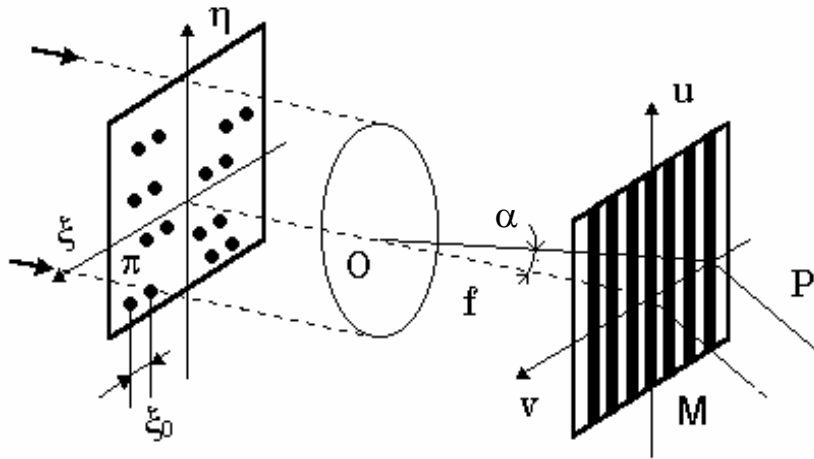


Рис. 8.14. Пространственный спектр экрана, содержащего хаотически расположенные пары отверстий

Получить такой экран можно простым смещением в заданном направлении исходных отверстий на расстояние  $\xi_0$ . Пространственный спектр полного набора отверстий имеет такой же вид, как и спектр одной пары отверстий, но интенсивность его в  $N$  раз больше, где  $N$  - число пар отверстий. Спектр двух малых отверстий представляет собой полосы Юнга, ориентированные перпендикулярно линии, соединяющей центры отверстий. Угловое расстояние между линиями

$$\alpha = \frac{\lambda}{\xi_0}.$$

Представим точечные источники функцией  $f(\eta, \xi)$ . Экран, содержащий полный набор отверстий, можно представить сверткой

$$f(\eta, \xi) \otimes [\delta(\eta, \xi) + \delta(\eta, \xi - \xi_0)].$$

Пространственный спектр, соответствующий набору отверстий в экране  $\pi$ , вычисляется как Фурье-образ свертки. Функция  $f(\eta, \xi)$  описывает диффузор, а ее Фурье-образ  $F(u, v)$  - спекл-структуру, возникающую в фокальной плоскости. Фурье-образ суммы двух дельта-функций равен  $1 + \exp(j2\pi v \xi_0 / \lambda)$ . Без учета центральной области вокруг точки  $M$ , Фурье-образ распределения амплитуд в плоскости экрана  $\pi$  будет равен

$$F(u, v)[1 + \exp(j2\pi v \xi_0 / \lambda)].$$

С точностью до постоянного множителя для интенсивности получим

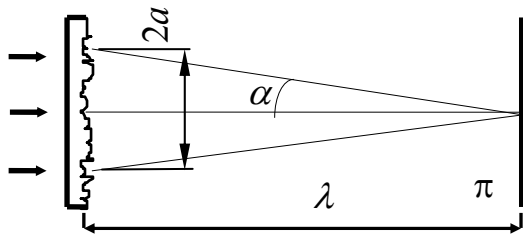
$$I = |\tilde{D}(u, v)|^2 \cos^2 \frac{\pi v \xi_0}{\lambda}.$$

Из этого выражения видно, что диффузный фон модулирован полосами Юнга, расстояние между которыми равно  $\alpha = \lambda / \xi_0$ .

## Свойства спеклов в изображении объекта, освещаемого лазером

Если диффузный объект  $G$  освещают лазером, т.е. практически точечным источником, излучающим монохроматическое излучение, то излучение, рассеиваемое всеми точками поверхности объекта, когерентно и, следовательно, интерферирует. На изображении возникает множество интенсивных пятен, расположенных совершенно хаотически.

### 1. Размер спекла

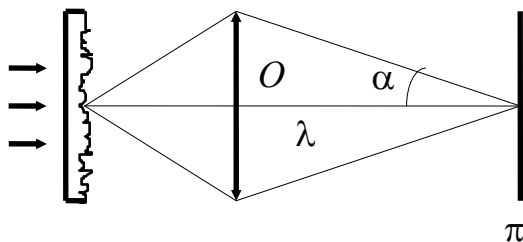


- Объективная спекл картина

Рис. 8.15. Размер объективного спектра

**Диаметр  $\varepsilon$  наименьших из спеклов приблизительно равен диаметру дифракционной картины от области, освещаемой лазером на поверхности матовой пластины.**

Если диаметр области, освещаемой лазером  $2a$ , расстояние от объектива до плоскости наблюдения  $\lambda$ , то  $\alpha = a/\lambda$  и  $\varepsilon \approx \lambda/\alpha$



- Субъективная спекл картина

Рис. 8.16. Размер субъективного спектра

**Диаметр  $\varepsilon$  наименьших из спеклов приблизительно равен диаметру дифракционной картины от объектива, формирующего изображение.**

Если диаметр объектива  $2a$ , расстояние от объектива до плоскости наблюдения  $\lambda$ , то  $\alpha = a/\lambda$  и  $\varepsilon \approx \lambda/\alpha$

- Смещение

Если объект  $G$  освещается параллельным пучком, падающим на него под некоторым углом, то при его смещении в собственной плоскости разность фаз волн, исходящих из его разных точек, не изменяется. Поэтому спекл-структура в плоскости  $\pi'$  тоже останется без изменений, она лишь будет следовать за перемещением объекта.

- Поворот

Если же объект  $G$  повернуть в его собственной плоскости, то относительные фазы и спекл-структура изменятся (во всех случаях, кроме случая нормального

падения пучка на объект  $G$ ). То же самое происходит и тогда, когда мы имеем дело с диффузно отражающим объектом.

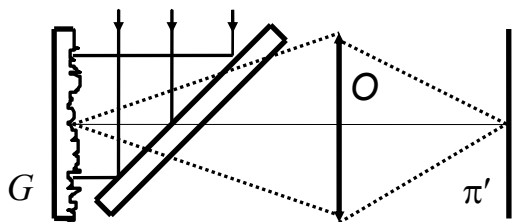


Рис. 8.17. Схема с перпендикулярным падением лучей

- Влияние диафрагмы

Если в некоторой плоскости перед объективом поместить диафрагму и перемещать ее в этой плоскости, то спекл-структура в плоскости  $\pi'$  будет изменяться. Смещение диафрагмы эквивалентно введению некоторого фазового множителя, неодинакового для разных точек объекта, на которых происходит дифракция излучения.

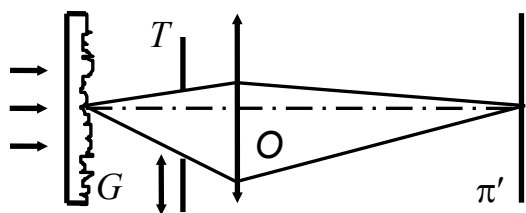


Рис. 8.18. Влияние смещения диафрагмы

При изменении положения диафрагмы изменяются разности фаз в плоскости  $\pi$  между дифракционными картинками, соответствующими разным точкам объекта  $G$ , а это и приводит к изменению спекл-структуры.

- Влияние формы диафрагмы

Форма диафрагмы определяет форму спеклов, как следует из механизма их образования. На рис. 8.19 для примера показаны спеклы, получающиеся в случае щелевой диафрагмы - все они вытянуты в направлении, перпендикулярном ориентации щели.

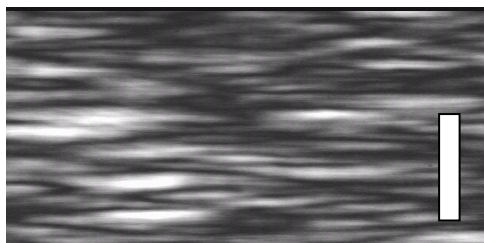


Рис. 8.19 Влияние формы щелевой диафрагмы (в правом углу рисунка приведена форма диафрагмы)

- Изменение спекл-структуры при смещении плоскости наблюдения

Сместим плоскость наблюдения  $\pi$  в направлении перпендикуляра к ней. Дифракционные картины, являющиеся изображениями разных точек матового

стекла, изменятся. Если смещение  $\delta\lambda$  мало, то между спекл-структурами в плоскостях  $\pi'$  и  $\pi''$  будет некая корреляция.

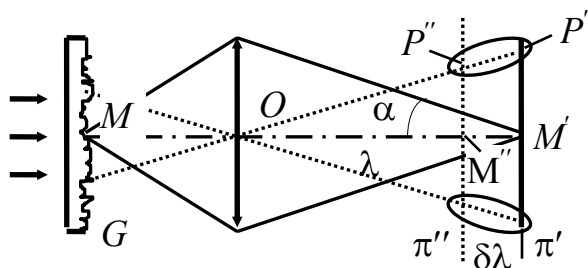


Рис. 8.20. Влияние смещения плоскости наблюдения

Как известно, изображением каждой точки объекта является дифракционная картина, имеющая в трехмерном пространстве форму "сигары". Такие "сигары" ориентированы так, как показано на рисунке и в пространстве расположены хаотически. Если смещение мало по сравнению с половиной длины "сигары", то будет существовать корреляция между спекл-структурами в плоскостях  $\pi'$  и  $\pi''$ . Для этого случая можно ввести коэффициент подобия

$$\frac{M''P''}{M'P'} = \frac{\lambda - \delta\lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

Из этой формулы и условия подобия изображений точечного источника при дефокусировке следует, что для увеличения коэффициента подобия при заданном  $\delta\lambda$  нужно уменьшить угловую апертуру  $2\alpha$  объектива  $O$ . К такому же выводу приходим, если рассматривать смещение не плоскости  $\pi'$ , а самого диффузного объекта  $G$ .

Аналогичный результат будет получен и при смещении объектива вдоль оси при неизменном положении плоскости  $\pi'$  и объекта  $G$ .

### Спеклы Френеля и Фраунгофера

По аналогии с дифракцией Френеля и дифракцией Фраунгофера можно говорить о спеклах Френеля и Фраунгофера. Рассмотрим дифракцию на круглом отверстии в зоне Френеля на оси системы.

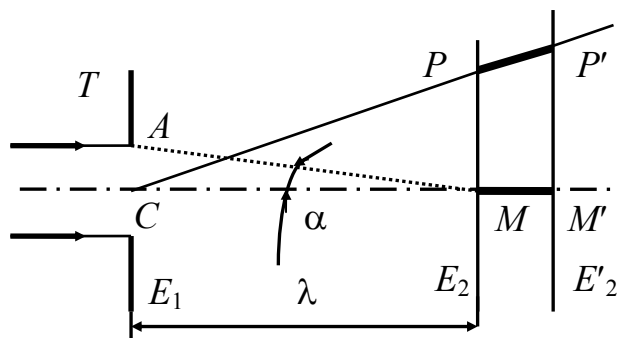


Рис. 8.21. Схема дифракционной задачи Френеля

Интенсивность в точке  $M$  представляет собой результат интерференции волн, испускаемых всеми точками отверстия  $T$ . Разность хода в точке  $M$  для

волн, исходящих из центра  $C$  и из крайней точки  $A$  отверстия  $T$ , дается выражением

$$\Delta = AM - CM = \frac{a^2}{2\lambda},$$

где  $a$  - радиус отверстия, а  $\lambda$  - расстояние  $E_1E_2$ . Разность хода в точке  $M$  для волн, испускаемых двумя произвольными точками отверстия  $T$ , меняется в интервале от 0 до  $\Delta$ , так как  $\Delta$  - максимальная разность хода волн для данного отверстия. Сместим плоскость наблюдения на расстояние  $\delta\lambda$ . Если величина смещения достаточно мала, то вид интерференционной картины в точке  $M'$ , останется практически таким же, как и в точке  $M$ . Смещению на величину  $\delta\lambda$  соответствует изменение разности хода на  $a^2\delta\lambda/2\lambda^2$ . Чтобы вид интерференционной картины оставался неизменным вдоль отрезка  $MM'$ , изменение разности хода должно быть значительно меньше длины волны света  $\lambda$ . Поскольку  $\alpha = a/\lambda$ , получаем условие

$$\delta\lambda \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Аналогичные выводы получаются и для рассмотрения явления не на оси системы. Можно утверждать, что дифракционные картины Френеля в плоскостях  $E'_2$  и  $E_2$  подобны. Если экран  $E_2$  сместить на расстояние, превышающее  $2\lambda/\alpha^2$ , то дифракционная картина Френеля изменится. Чем больше расстояние  $E_1E_2$  (меньше угол  $\alpha$ ), тем медленнее изменяется дифракционная картина при смещении плоскости.

Начиная с некоторого достаточно большого расстояния между экранами  $E_1$  и  $E_2$ , экран  $E_2$  можно отодвигать сколь угодно далеко. Пока допустимое смещение  $\delta\lambda$  конечно, мы имеем дело с дифракцией Френеля. При дальнейшем удалении экрана  $E_2$  мы постепенно перейдем в область дифракции Фраунгофера. В этой области  $\delta\lambda$  может принимать практически любые значения.

Теперь рассмотрим случай, когда в плоскости отверстия находится экран с очень большим числом хаотически расположенных маленьких отверстий. Вследствие интерференции в плоскости  $E_2$  будет наблюдаться спекл-структура.

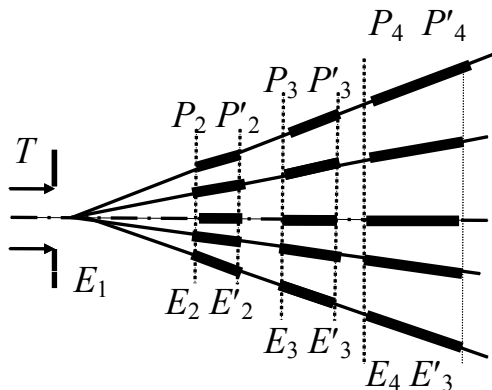


Рис. 8.22. Подобные спекл-структуры, наблюдаемые в параллельных плоскостях

Если экран  $E_2$  сместить на расстояние, соответствующее критерию малости смещения, то картина интерференции практически не изменится.

Можно изобразить целый ряд пар параллельных плоскостей, разделенных тем расстоянием, на которое можно смещать плоскость наблюдения без существенных изменений в структуре спеклов. В той области пространства, где расстояния  $E_2E'_2$ ,  $E_3E'_3$  и т.д. конечны, наблюдаются спеклы Френеля (рис. 8.22).

Если же все больше и больше удалять плоскость наблюдения, то мы перейдем в область спеклов Фраунгофера, где расстояние между плоскостями  $E_n$  и  $E'_n$  становится бесконечно большим.

Размер спеклов при удалении плоскости наблюдения будет увеличиваться, но характер распределения интенсивности будет сохраняться.



## 8.2. Нормально развитая спекл-картина, условия ее наблюдения, контраст спекл-картины, индивидуальный спекл

Если падающая волна монохроматическая и полностью поляризованная, суммарное поле в произвольной точке наблюдения можно рассматривать как сумму ряда комплексных факторов, каждый из которых порождается отдельным рассеивателем или отдельной областью непрерывно рассеивающей поверхности. Сумма множества случайно сфазированных комплексных вкладов может рассматриваться как "случайное блуждание в комплексной области" (рис. 8.23)

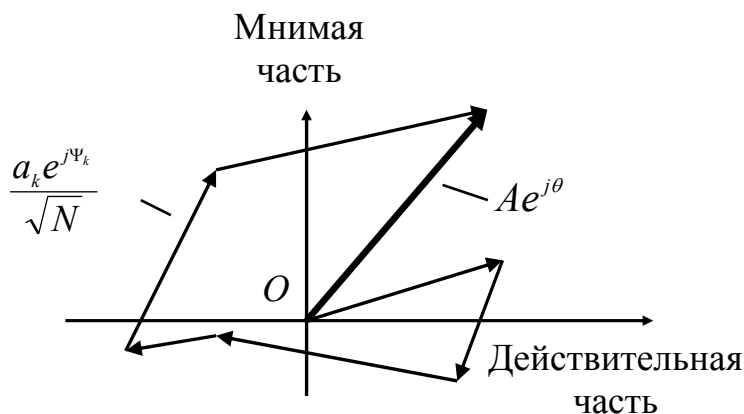


Рис. 8.23. Сумма случайных фазоров

При таком подходе поле можно рассматривать как комплексный аналитический сигнал

$$U(x,y,z,t) = A(x,y,z)\exp(i2\pi vt),$$

где  $\nu$  - частота излучения;  $A(x,y,z)$  - комплексная амплитуда.

$$A(x,y,z) = |A(x,y,z)|\exp[iq(x,y,z)],$$

$\theta(x,y,z)$  - фаза суммарной волны.

Рассмотрим сумму очень большого числа  $N$  комплексных фазоров; при этом пусть  $k$ -й фазор имеет случайную величину  $a_k / \sqrt{N}$  и случайную фазу  $\varphi_k$ .

Комплексная амплитуда результирующего возмущения может быть представлена таким образом

$$A(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N |a_k| \exp(i\Psi_k),$$

где  $|a_k|$  и  $\Psi_k$  - амплитуда и фаза вклада от  $k$ -той рассеивающей области,  $N$  - число таких вкладов.

Чтобы получить нормально развитую спекл-картину, необходимо чтобы выполнялись определенные условия.

**Во-первых**, случайное "блуждание" должно состоять из большого числа случайных членов.

**Во-вторых**, эти члены должны быть независимы друг от друга.

**В-третьих**, фазы, связанные с каждым комплексным вкладом, должны быть полностью случайны, т.е. равномерно распределены в главном интервале  $(-\pi, \div\pi)$ .

Из первых двух предположений, в соответствии с центральной предельной теоремой, реальные и мнимые части комплексной суммы многих независимых случайных вкладов должны быть гауссовыми случайными переменными при больших значениях  $N$ .

Центральная предельная теорема устанавливает характер распределения среднего  $\bar{x}$  в целом при неограниченном росте объема выборки, а также асимптотический вид математического ожидания каждого испытания и дисперсии среднего. Она формулируется следующим образом: Пусть случайные величины имеют один и тот же закон распределения, среднее значение  $\mu$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Если дисперсия  $\sigma^2$  конечна, то при увеличении объема выборки  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) распределения выборочного среднего  $\bar{x}$  будет стремиться к нормальному распределению со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

Если третье предположение справедливо, то можно показать, что реальная и мнимая части должны иметь равную дисперсию и среднее значение, приводя к "круговой" гауссовой комплексной статистике. И, если статистика результирующего поля имеет гауссов характер, то для него справедливо распределение Рэлея для интенсивности

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle \exp\left(\frac{I}{\langle I \rangle}\right)},$$

где  $I$  - интенсивность рассеянного излучения,  $P(I)$  - плотность вероятности распределения интенсивности,  $\langle I \rangle$  - средняя или ожидаемая интенсивность. Фундаментальное свойство распределения Рэлея заключается в том, что стандартное отклонение  $\sigma_I$  точно равно среднему. Таким образом, контраст спекл-картины, определяемый как

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle},$$

всегда равен единице для поляризованного излучения. Из-за столь высокого контраста спекл-структура очень мешает наблюдателю, особенно при рассмотрении тонкой структуры изображения.

Распределение средней интенсивности  $\langle I \rangle$  в изображении освещаемого шероховатого объекта совпадает с интенсивностью, которая наблюдалась бы, если бы объект освещался пространственно некогерентным светом с той же самой спектральной плотностью мощности.

Таким образом, в рамках этой модели для анализа статистических свойств рассеянного поля не обязательно конкретизировать статистику неровностей поверхности.

Для описания пространственной структуры спекл-картины необходимо определить автокорреляционную функцию интенсивности и энергетический спектр. Автокорреляционная функция интенсивности по определению равна (Автокорреляционная функция записана относительно средней величины интенсивности)

$$B_I(\Delta x, \Delta y) = \langle I(x + \Delta x, y + \Delta y)I(x, y) \rangle - \langle I \rangle^2.$$

С физической точки зрения автокорреляционная функция есть мера структурного подобия двух функций  $I(x + \Delta x, y + \Delta y)$  и  $I(x, y)$ .

Благодаря свойствам комплексного гауссова процесса вычисление автокорреляционной функции интенсивности сводится к вычислению автокорреляционной функции поля:

$$B_I(\Delta x, \Delta y) = |B_A(\Delta x, \Delta y)|^2,$$

$$\text{где } B_A(\Delta x, \Delta y) = \langle A(x + \Delta x, y + \Delta y)A^*(x, y) \rangle.$$

Для автокорреляционной функции флуктуаций поля в зоне Фраунгофера в соответствии с теоремой Винера-Хинчина может быть записано выражение

$$B_A(\Delta x, \Delta y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda D} (\Delta x \xi + \Delta y \eta)\right] d\xi d\eta,$$

где распределение интенсивности рассеянного излучения  $S(\xi, \eta)$  предполагается пропорциональным распределению интенсивности падающего излучения по рассеивающей области  $|E(\xi, \eta)|$ , т.е.

$$S(\xi, \eta) = k |E(\xi, \eta)|^2.$$

**Теорема Винера-Хинчина:** *Взаимный энергетический спектр двух случайных процессов равен фурье-образу функции крос-корреляции этих процессов.*

При выводе выражения, связывающего автокорреляционную функцию и спектральную плотность поля был использован дельта-коррелированный подход, т.е. предполагалось, что микроструктура рассеивающей поверхности настолько тонкая по сравнению с размерами освещающего пучка, что автокорреляционная функция рассеянного поля в непосредственной близости от поверхности может быть аппроксимирована двумерной дельта-функцией Дирака:

$$B_I(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \approx k E(\xi, \eta) E^*(\xi_1, \eta_1) \delta^2(\xi - \xi_1; \eta - \eta_1).$$

Это соответствует условиям формирования нормально развитой спекл-картины, которые требуют наличия достаточно большого числа рассеивателей в рассеивающей области.

Таким образом получаем, что автокорреляционная функция флуктуаций интенсивности в зоне Фраунгофера в случае нормально развитой спекл-картины имеет вид

$$B_I(x, y) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta) \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda D} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta \right|^2.$$

Спектр Винера флуктуаций интенсивности в плоскости Фраунгофера, описывает распределение пространственных частот и характеризует распределение интерференционных пятен по размерам. Он представляет из себя Фурье-преобразование автокорреляционной функции интенсивности поля:

$$\begin{aligned} W(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_I(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta) S(\xi + \lambda D u, \eta + \lambda D v) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

т.е. спектр Винера флуктуаций интенсивности рассеянного излучения оказывается равен автокорреляционной функции распределения интенсивности по рассеивающей апертуре.

Необходимо также отметить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(u, v) du dv = B_I(0, 0) = \sigma_I^2 = \langle I \rangle^2.$$

При наличии изображающей системы автокорреляционную функцию и спектр Винера в плоскости изображения можно получить если оптическую систему описать линейным фильтром с передаточной функцией  $K(u, v)$ . Передаточная функция связана с функцией зрачка

$$K(u, v) = H(\lambda D_2 u, \lambda D_2 v),$$

где  $D_2$  - расстояние от главной оптической плоскости до плоскости изображения

$$W(u, v) = k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi, \eta)|^2 |H(\xi + \lambda D_2 u, \eta + \lambda D_2 v)|^2 d\xi d\eta.$$

Таким образом, спектр Винера и автокорреляционная функция интенсивности для плоскости изображения (при наблюдении субъективной спекл-картины) имеют тот же самый смысл, что и для плоскости Фраунгофера при наблюдении объективной спекл-картины.

Функция автокорреляции интенсивности для объективной спекл-картины, возникающей при однородном освещении квадратной области поверхности с размерами  $D \times D$  имеет вид

$$B_I(x, y) = \langle I \rangle^2 \left[ 1 + \operatorname{sinc}^2 \frac{Dx}{\lambda \lambda} \operatorname{sinc}^2 \frac{Dy}{\lambda \lambda} \right],$$

где  $\lambda$  - расстояние от рассеивающей поверхности до плоскости регистрации спекл-картины.

Если на некотором расстоянии от рассеивающей поверхности расположить плоский экран, на него спроецируется часть спекловой картины. Средний размер спеклов определится размером освещаемого участка поверхности и расстоянием от него до экрана.

Для равномерно освещенного участка поверхности диаметром  $D$  средний размер спеклов на экране, расположенном на расстоянии  $\lambda$  от рассеивающей поверхности составляет

$$\sigma_0 \approx 1.2 \frac{\lambda \lambda}{D},$$

что соответствует размеру пятна Эйри от апертуры диаметром  $D$ . При использовании апертуры квадратной формы средний размер спеклов будет примерно равен  $\lambda \lambda / D$ .

Для субъективной спекл-картины, формируемой оптической системой с диаметром выходного зрачка  $D$ , функция автокорреляции имеет аналогичный вид. Отличие может заключаться только в форме выходного зрачка при формировании субъективной спекл-картины и зоны освещения при регистрации объективной спекл-картины.

$$B_1(r) = \langle I \rangle^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{2J_1(\pi D r / \lambda \lambda)}{\pi D r / \lambda \lambda} \right]^2 \right\},$$

где  $J_1$  - функция Бесселя, а  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ .

В случае наблюдения субъективной спекловой структуры она модулирует с высокой пространственной частотой изображение, которое было бы получено в данной системе с некогерентным светом. Средний диаметр спекла определяется формулой

$$\sigma_s \approx 1.2 \frac{\lambda d_2}{D} = 1.2(1 + M)\lambda F,$$

где  $M = d_2/d_1$  увеличение изображения;  $F = f/D$  - апертурное отношение, т.е. величина, обратная светосиле системы.

Таким образом, можно сделать вывод, что субъективные спеклы эквивалентны объективным, генерируемым линзовым зрачком, рассматриваемым как рассеивающая поверхность.

В общем случае аналитические свойства спекл-картины зависят как от степени когерентности источника излучения, так и от характера микроструктуры рассеивающей поверхности. Если же пренебречь их зависимостью от тонких деталей строения поверхности, то для полностью когерентного излучения нетрудно установить связь между функцией автокорреляции и комплексной степенью когерентности спекл-поля:

$$B_I(x, y) = \langle I \rangle^2 [1 + |\gamma(x, y)|^2].$$

Поскольку мерой когерентности является видность интерференционной структуры, из последнего выражения следует, что ширина функции автокорреляции совпадает с расстоянием между областями с максимальной и минимальной интенсивностями. Это расстояние и принимается за характерный размер элемента спекл-картины, который принято называть индивидуальным спеклом.

**Расстояние между областями с максимальной и минимальной интенсивностями принимается за характерный размер элемента спекл-картины, который принято называть индивидуальным спеклом.**

### 8.3. Интерференция в диффузном свете. Спекл-интерферометрия. Примеры практического применения

Плоскопараллельная пластинка  $L$  освещается пучком параллельных лучей. Поверхность  $AB$  пластинки - диффузно отражающая, а ее задняя поверхность - зеркальная.

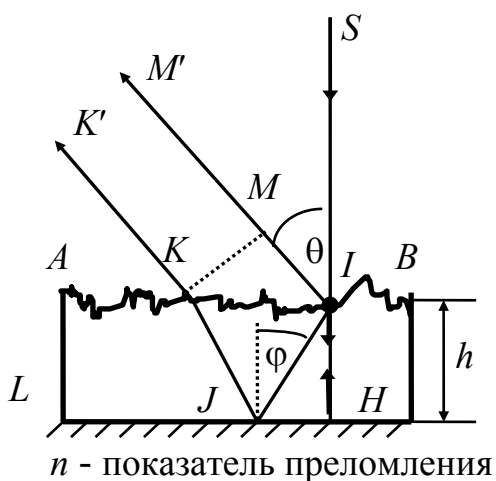


Рис. 8.24. Интерференция на бесконечности лучей, рассеянных в точке  $I$

Рассмотрим ход лучей по двум разным оптическим путям (рис. 8.24).

1) Падающий луч  $SI$  нормально входит в толщу пластинки в точке  $I$ , идет вдоль пути  $IHI$  и в той же точке  $I$  диффузно рассеивается во всех направлениях.

Рассмотрим, например, направление  $IM'$ , составляющее угол  $\theta$  с нормалью к пластинке.

2) Падающий луч  $SI$  в точке  $I$  диффузно рассеивается во всех направлениях. Рассмотрим, например, направление  $IJ$ , такое, что луч, распространяющийся вдоль него, испытывает в точке  $J$  зеркальное отражение и далее из точки  $K$  идет в направлении  $KK'$ , параллельном  $MM'$ .

Диффузное рассеяние света, обусловленное частицами шероховатой поверхности, приводит к беспорядочному изменению фаз падающих лучей. Два луча, диффузно рассеянных поверхностью  $AB$ , могут интерферировать даже в случае, если они рассеиваются двумя разными точками поверхности. При переходе от одной пары лучей к другой разность фаз меняется беспорядочно и для всего светового пучка интерференционная картина будет отсутствовать. Но

для лучей, диффузно рассеянных одной и той же точкой, это не так: два луча, такие как  $SIHIM'$  и  $SIJJK'$ , рассеянные одной и той же точкой  $I$  поверхности  $AB$ , способны интерферировать. Это справедливо для любой точки поверхности  $AB$  и, следовательно, для всей совокупности лучей светового пучка.

Вычислим разность хода  $\Delta$  между двумя рассмотренными выше лучами  $SIHIM'$  и  $SIJJK'$ .

$$\Delta = 2n\overline{IH} + \overline{IM} - 2n\overline{IJ} = 2nh(1 - \cos \varphi)$$

$n$  - показатель преломления пластинки  $L$ . Если углы  $\theta$  и  $\varphi$  малы, то

$$\Delta \approx \frac{h\theta^2}{n}.$$

Лучи  $SIHIM'$  и  $SIJJK'$  на выходе из пластинки  $L$  идут в параллельных направлениях и интерферируют на бесконечности.

Интерференционные полосы можно наблюдать в следующей оптической схеме (рис. 8.25).

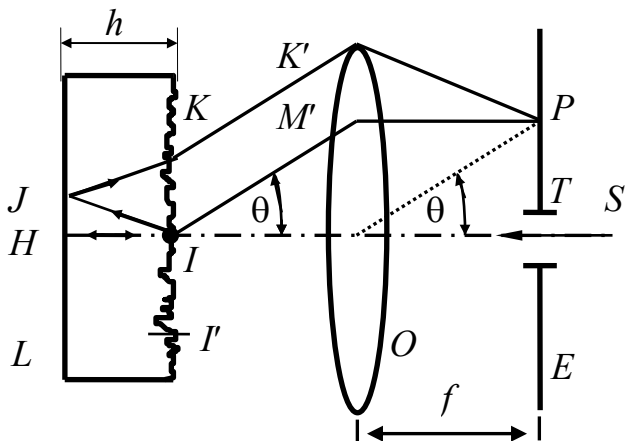


Рис. 8.25. Образование интерференционных колец в плоскости экрана  $E$

В фокальной плоскости линзы  $O$  помещен экран  $E$ , в котором имеется малое отверстие  $T$ , через которое проходит узкий пучок излучения. Падающий луч  $SI$  испытывает диффузное рассеяние в точке  $I$  либо до, либо после отражения на задней поверхности пластинки  $L$ . Интерферировать будут лучи  $IHIM'$  и  $IJKK'$ , испытавшие диффузное рассеяние в одной и той же точке  $I$  поверхности  $AB$ . Выйдя из пластинки, эти два луча распространяются в параллельных направлениях  $KK'$  и  $IM'$  и интерферируют в точке  $P$  фокальной плоскости линзы  $O$ . Их разность хода определяется выражениями, аналогичными предыдущему случаю. Интенсивность в точке  $P$ , обусловленная интерференцией этих лучей, дается классической формулой Френеля. Полагая, что амплитуды одинаковы, получим для интенсивности

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda}.$$

Для другой точки  $I'$  поверхности  $AB$  фаза интерферирующих волн будет иной, поскольку фазы волн, диффузно рассеиваемых разными точками поверхности  $AB$ , изменяется беспорядочно. В силу симметрии, рассматриваемой схемы и диффузного характера рассеяния падающего излучения на окружности, соответствующей точке  $P$ , интенсивность излучения

будет одинакова. Следовательно, интерференционная картина будет иметь круговую симметрию, и представлять систему колец (рис. 8.26).

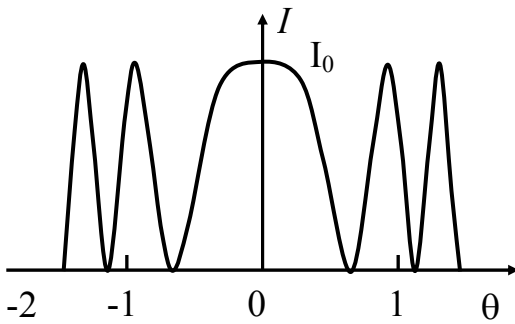


Рис. 8.26. Распределение интенсивности в интерференционных кольцах (сечение)

В направлении  $\theta$ , т.е. в точке  $P$  фокальной плоскости  $E$  линзы  $O$ , будет наблюдаться светлое кольцо, если

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{h\theta^2}{n\lambda} = p,$$

где  $p$  - целое число. Угловой радиус первого светлого кольца будет ( $p=1$ )

$$\theta = \sqrt{\frac{n\lambda}{h}}.$$

В случае стеклянной пластинки толщиной 0,5 мм с показателем преломления  $n = 1,5$  первое светлое кольцо имеет угловой диаметр  $2\theta$ , в 8 раз превышающий угловой диаметр Солнца (при фокусном расстоянии 50 мм диаметр первого светлого кольца равен 4,35 мм;  $\lambda = 0,63$  мкм;  $\theta = 0,043$ ).

Существуют различия между этими кольцами и кольцами, наблюдаемыми в интерферометре Майкельсона, локализованными на бесконечности. Для колец, возникающих в диффузном свете, порядок интерференции в центре ( $\theta = 0$ ) всегда равен нулю независимо от толщины  $h$  пластинки, т.е. яркое светлое пятно будет совпадать с отверстием  $T$ .

На рис. 8.26 представлена кривая зависимости интенсивности  $I$  от угла  $\theta$ . Толщина диффузной пластинки  $h$  влияет только на диаметр колец. В интерферометре же Майкельсона интенсивность в центре зависит от "толщины" пластинки, и поэтому в белом свете кольца кажутся окрашенными и наблюдается только при условии, что разность хода  $\Delta$  очень мала.

Кольца же, наблюдаемые в при диффузном рассеянии, всегда видимы и в белом свете, независимо от толщины  $h$ . В центре этих колец всегда располагается светлое пятно.



## Опыт Берча-Токарского

Наличие зашумляющей изображение спекловой структуры является недостатком многих систем когерентной оптики. Однако спеклы нашли и полезное применение. Это обработка оптических изображений, регистрация смещений и деформаций диффузных объектов, астрономические исследования, связанные с изучением двойных звезд и измерением видимого диаметра звезды по пространственному спектру, создаваемому ею в присутствии атмосферной турбулентности спекл-структуры, измерение шероховатости и т.п.

Многие из этих применений связаны с обнаруженной в опыте Берча и Токарского возможностью введения в оптику пространственной несущей частоты и связанной с ней техники фильтрации изображений.

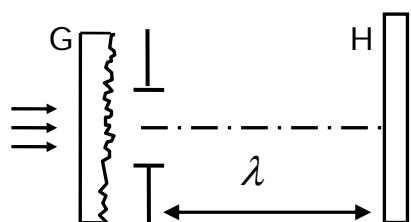


Рис. 8.27. Схема регистрации спекл-картины на фотопластинке  $H$

Матовое стекло  $G$  освещают лазером и регистрируют спекл-структуру на фотопластинке. Спекл-структура в плоскости  $H$  характеризуется функцией  $f(\xi, \eta)$ , описывающей распределение интенсивности света в этой плоскости. После проявления на кривой пропускания  $t$  фотопластинки имеется линейный участок  $AB$  (рис. 8.28). В случае использования матричного приемника также выбирается линейный участок.

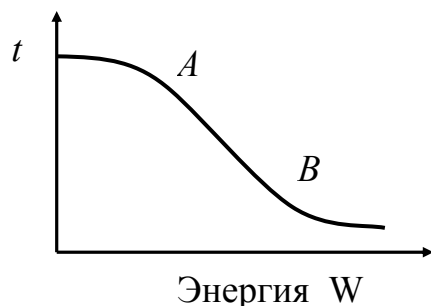


Рис. 8.28. Амплитудное пропускание негатива

Эту область и стараются использовать. В этой области амплитуда  $t$  и интенсивность  $f(\xi, \eta)$ , связаны линейным соотношением.

Будем считать, что интенсивность  $f(\xi, \eta)$ , такова, что амплитудное пропускание проявленного негатива не выходит из области линейности. Тогда амплитудное пропускание негатива можно записать

$$t = a - b f(\xi, \eta),$$

где  $a, b$  - константы, зависящие от свойств используемой фотоэмульсии.

Сделаем теперь не одну, а две одинаковые по времени экспозиции, сместив в промежутке фотопластинку. Регистрируемая интенсивность будет

$$f(\xi, \eta) + f(\xi - \xi_0, \eta)$$

Так как смещение эквивалентно свертке с дельта-функцией. Регистрируемую интенсивность можно записать в виде

$$f(\xi, \eta) * [\delta(\xi, \eta) + \delta(\xi - \xi_0, \eta)]$$

Таким образом, если на фотопластинке высокого разрешения зарегистрировать два изображения одной и той же спекловой структуры (например от матового стекла) со сдвигом в пространстве на  $\xi_0$ , то получится негатив с амплитудным коэффициентом пропускания вида

$$t = a - bf(\xi, \eta) * [\delta(\xi, \eta) + \delta(\xi - \xi_0, \eta)]$$

где  $f(\xi, \eta)$  - распределение интенсивности в спекловой структуре;

Пространственный спектр зарегистрированной картины будет иметь вид

$$\bar{t}(u, v) = F[t(\xi, \eta)] = a\delta(u, v) - bF(u, v)[1 + \exp(i2\pi u\xi_0 / \lambda)],$$

где  $F(u, v)$  - Фурье-образ функции, а  $u, v$  - угловые координаты в фокальной плоскости.

При освещении негатива параллельным пучком лучей в фокальной плоскости линзы  $O$  можно получить изображение этого спектра. Член  $a\delta(u, v)$  соответствует (если пренебречь дифракцией) изображению точечного источника, расположенного на бесконечности. Это изображение локализовано в фокусе  $F$ . Второй член представляет собой (умноженный на константу  $b$ ) Фурье - образ  $F(u, v)$  функции  $f(u, v)$ , модулированный функцией  $1 + \exp(i2\pi u\xi_0 / \lambda)$ . Диффузор  $f(u, v)$  имеет очень тонкую структуру, а поэтому его Фурье образ  $F(u, v)$  сильно растягивается в фокальной плоскости линзы  $O$  (рис. 8.29).

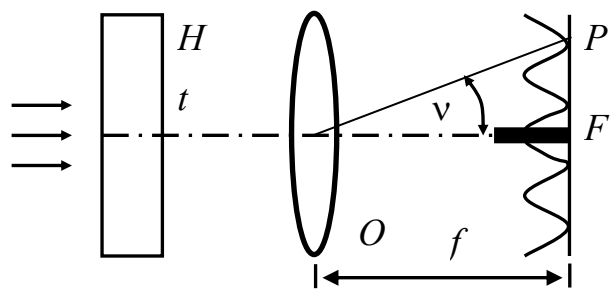


Рис. 8.29. Спектр двух идентичных смещенных относительно друг друга спекл-структур

Фурье-образ  $F(u, v)$ , как и сама функция  $f(u, v)$  тоже описывает некую спекл - структуру. Если пренебречь изображением источника в фокусе  $F$ , то во всей остальной части фокальной плоскости интенсивность света с точностью до постоянного множителя будет равна.

$$I = |F(u, v)|^2 |1 + \exp(i2\pi u\xi_0 / \lambda)|^2 = |F(u, v)|^2 \cos^2(\pi u\xi_0 / \lambda).$$

Таким образом, диффузный фон  $|F(u, v)|$  оказывается модулированным функцией  $\cos^2(\pi u\xi_0 / \lambda)$ , описывающей полосы Юнга. Угловое расстояние между двумя соседними полосами равно  $\lambda / \xi_0$ . Например, при смещении на 20 мкм угловое расстояние между двумя светлыми полосами составляет  $1^\circ 42'$ .

Спекл-структура на негативе  $H$  состоит из мелких темных пятен, и, согласно теореме Бабине, ее спектр (всюду, кроме точки  $F$ ) имеет тот же вид, что и спектр дополнительного непрозрачного экрана с малыми отверстиями на местах темных пятен. В рассмотренном выше мысленном опыте времена обеих экспозиций одинаковы и контраст полос Юнга максимален: т.е. минимальная интенсивность темных полос равна нулю.

### Несколько экспозиций на одной фотопластинке

Сделаем ряд экспозиций с одинаковыми временами и одинаковыми смещениями фотопластинки (в одном и том же направлении) в промежутке между экспозициями. Если число экспозиций равно  $N + 1$ , то регистрируемая интенсивность будет равна свертке

$$f(\xi, \eta) * \sum_{n=0}^N \delta(\xi - \xi_0, \eta).$$

Если осветить негатив, то в произвольной точке  $(u, v)$  фокальной плоскости линзы  $O$  амплитуда будет определяться Фурье-образом. Если не учитывать изображения источника в фокусе  $F$ , то, с точностью до постоянного множителя для интенсивности, будем иметь выражение

$$I = |F(u, v)|^2 \left\{ \frac{\sin[(N + 1)2\pi u \xi_0 / \lambda]}{\sin(2\pi u \xi_0 / \lambda)} \right\}^2.$$

Спектр, наблюдаемый в фокальной плоскости линзы  $O$ , будет таким же, как и спектр дифракционной решетки с периодом  $\xi_0$  и числом штрихов  $N + 1$ . Между двумя главными максимумами располагается  $N - 1$  вторичных максимумов.

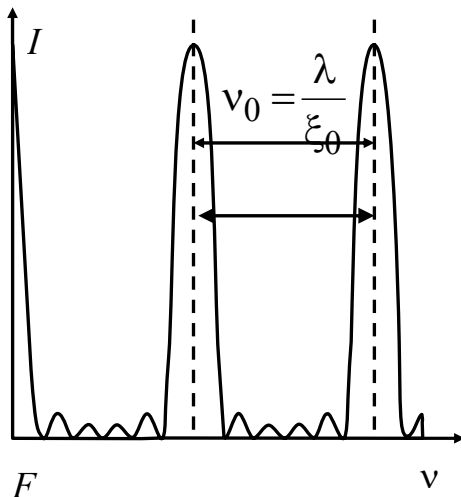


Рис. 8.30. Спектр для случая нескольких экспозиций со смещением

Если число экспозиций  $N + 1$  достаточно велико, то можно представить регистрируемую интенсивность в виде

$f(\xi, \eta) * \text{comb}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$ , где  $\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)$  гребенчатая функция. Откуда для

спектра интенсивности в фокальной плоскости линзы  $O$  получим

$$I = |F(u, v)|^2 \text{comb}\left(\frac{u}{u_0}\right), \quad u_0 = \frac{\lambda}{\xi_0}.$$

### Вычитание изображений

**Задача:** на двух диапозитивах  $A$  и  $B$  наряду с одинаковыми имеются и неодинаковые участки, и нужно получить разность  $(A - B)$ . Диапозитивы  $A$  и  $B$  могут представлять собой, например, полученные в разное время две фотографии одного и того же участка земной поверхности, на котором произошли какие-то изменения в промежутке между съемками. Требуется выявить эти изменения.

С этой целью делают копии диапозитивов  $A$  и  $B$  на одной и той же фотопластинке  $H$  высокого разрешения. При первой экспозиции перед  $H$  помещают диапозитив  $A$  и освещают его спекл-структурой, создаваемой матовым стеклом  $G$ , затем  $A$  заменяют  $B$ , и прежде чем сделать вторую экспозицию, смещают  $H$  на некоторое расстояние. При смещении  $H$  на ней запечатлеваются две спекл-структуры смещенные на малое расстояние. На одинаковых участках диапозитивов  $A$  и  $B$  имеются пары идентичных пятен. При дифракции два идентичных пятна дают интерференционные полосы Юнга в фокальной плоскости объектива.

Поместим в фокальную плоскость непрозрачный экран со щелью таким образом, чтобы щель совпала с темной полосой, тогда свет, дифрагированный двумя пятнами, не будет попадать на плоскость изображения, что справедливо и для всех пар одинаковых пятен. Это означает, что, все одинаковые участки диапозитивов  $A$  и  $B$  не будут видны на изображении  $H'$ .

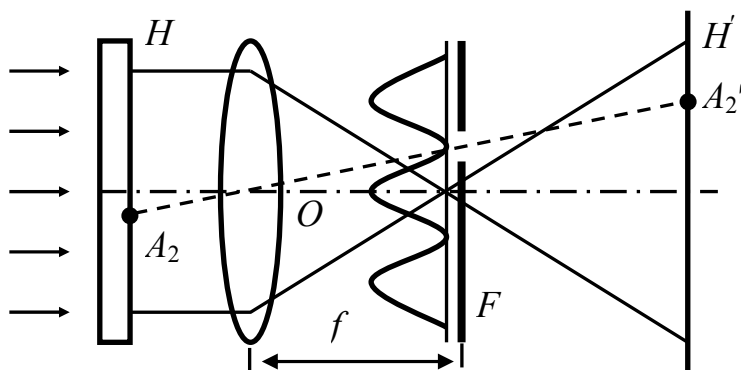


Рис. 8.31. Выявление в плоскости  $H'$  разницы двух изображений

В тех участках, где диапозитивы  $A$  и  $B$  не одинаковы, они дадут при дифракции на фотопластинке  $H$  полосы неодинаковой интенсивности (интенсивность в минимумах не будет равна нулю). И, в результате, в плоскости  $H'$  будут видны те участки изображений, на которых есть различия, т.е. видна "разность" изображений  $(A - B)$ .

Регистрируя диапозитивы на фотопластинке по описанной схеме, получают негатив с пространственным спектром:

$$\bar{i}(u, v) = a\delta(u, v) - b\{2[\bar{A}(u, v) * F(u, v)]\cos(\pi u/u_0) - [\bar{C}(u, v) * F(u, v)]\exp(-i\pi u/u_0)\}, \text{ где } \bar{C}(u, v) = \bar{A}(u, v) - \bar{B}(u, v).$$

Спектр содержит три составляющие, из которых только одна несет полезную информацию. Две другие должны быть отфильтрованы в процессе восстановления. Это достигается помещением в фокальную плоскость линзы экрана со щелью, приходящейся на минимум интерференционных полос, описываемых множителем  $\cos(\pi u/u_0)$ . Экран пропускает только составляющую

$$[\bar{C}(u, v) * F(u, v)]\exp(-i\pi u/u_0).$$

В плоскости изображения  $H'$  будет видна картина  $\bar{C}(u, v)$ , промодулированная спекл-структурой  $D$ . Такая структура спеклов мало сказывается на качестве изображения  $C$ , поэтому можно считать задачу решенной.

### Спекл-интерферометрия

Конкретная спекловая структура содержит информацию о микрорельефе и форме объекта. Проводя статистическую обработку пятнистой структуры, можно получить информацию и о параметрах перемещения объекта, в том числе о его смещениях, скорости движения, амплитуде и частоте его вибраций и т. д.

Преимущество методов исследования поверхности с помощью спекл-структуры заключается в возможности изучения объектов, недоступных для непосредственного наблюдения, с целью измерения параметров микрорельефа, формы и перемещений, сравнимых с длиной волны  $\lambda$ , при сравнительной простоте технической реализации этих методов.

Исследование шероховатости поверхности. Обычно определяемые параметры микрорельефа поверхности - это дисперсия  $\sigma^2$  высот шероховатостей на поверхности объекта и радиус корреляции  $r_{ii}$  этих высот. Из геометрических соображений следует, что случайные фазы волн, отраженных от различных участков поверхности однозначно связаны с высотами шероховатостей, причем дисперсию этих фаз  $\sigma_\phi^2$  можно приближенно

определить с помощью соотношения

$$\sigma_\phi^2 = \left(2 \cdot \frac{2\pi\sigma}{\lambda}\right)^2.$$

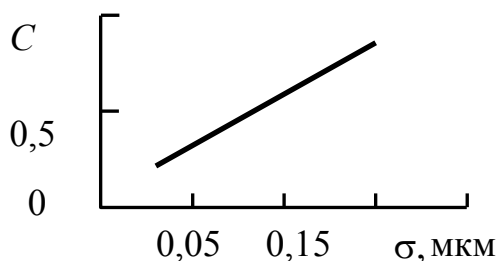


Рис. 8.32. Изменение контраста слабошероховатого объекта

Если высота шероховатостей много больше длины волны падающего излучения, то при большом числе вкладов  $N$ , в соответствии с теорией, контраст  $C = 1$ . В этом случае, в параметре  $C$  никакой информации о микрорельефе поверхности не содержится. Но контраст изображения

слабошероховатого объекта ( $\sigma_\phi^2 \ll 1$ ) практически линейно зависит от высоты шероховатостей, что подтверждается и экспериментом.

Пусть  $\sigma_\phi^2 \ll 1$ , тогда,  $C \approx 4\pi^2 \sigma^2 / \lambda^2 N$ .

Для того чтобы воспользоваться этой формулой, нужно знать число независимых вкладов  $N$ . Если для формирования когерентного изображения используется оптическая система, то число независимых вкладов  $N$  может интерпретироваться, как число областей корреляции высот шероховатостей, расположенных в одном элементе разрешения оптической системы. В этом случае, отличие круговой гауссовой статистики, соответствующей нормально развитой спекл-структуре от некруговой, значительны уже при числе областей корреляции меньшем или равном 10.

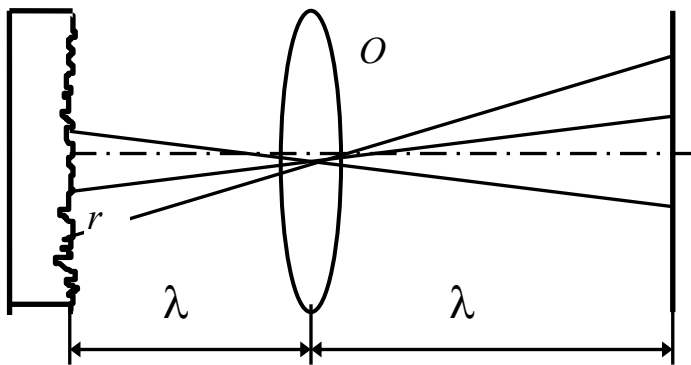
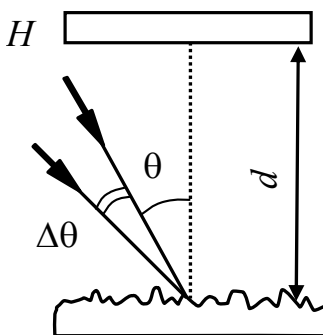


Рис. 8.33. К элементу разрешения оптической системы

Число областей корреляции высот шероховатостей, расположенных в одном элементе разрешения оптической системы  $p = (S_p \pi r_{uu}^2 / \lambda^2 \lambda_0^2)^{-1}$ , где  $S_p$  - площадь апертуры;  $r_{uu}$  - радиус корреляции шероховатостей на исследуемой поверхности;  $\lambda_0$  - расстояние от исследуемой поверхности до оптической системы.

Элемент разрешения оптической системы приблизительно равен  $r \approx \lambda_0 / d_a$ , где  $d_a$  - диаметр апертуры оптической системы. Средний размер спекловой структуры -  $\lambda / d_a$ . Чем хуже разрешающая способность оптической системы, тем больший размер имеет элемент разрешения и, следовательно, тем большее число  $N = \lambda_0 / d_a r_{uu}$  некоррелированных шероховатостей в нем содержится.

**Измерение шероховатости поверхности по корреляции между двумя спекл-структурами, полученными при двух разных углах падения излучения.**



На исследуемую поверхность последовательно под разными углами направляют лазерное излучение и регистрируют на фотопластинке  $H$  две спекл-структуры. В результате на фотопластинке получают две спекл-структуры сдвинутые одна относительно другой.

Рис. 8.34. Регистрация на фотопластинке двух спекл-структур, получаемых при двух наклонах освещающего пучка

Если изменение угла падения достаточно мало, то результатом оказывается простое смещение  $\xi_0$  спекл-структуры  $\xi_0 = d \cos \theta \Delta \theta$ . Если изменение угла  $\Delta \theta$  при заданном угле падения излучения  $\theta$  будет достаточно большим, то можно показать, что смещение картины спеклов будет сопровождаться изменением ее структуры, обусловленное шероховатостью поверхности.

После проявления негатив  $H$  освещают параллельным пучком и в фокальной плоскости оптической системы наблюдают эквидистантные параллельные интерференционные полосы, угловое расстояние, между которыми равно  $\lambda/\xi_0$ ; контраст полос будет зависеть от шероховатости поверхности. Метод пригоден для измерения больших шероховатостей, однако для  $\sigma > 30$  мкм он не представляет практического интереса.

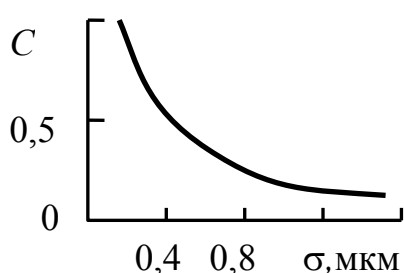


Рис. 8.35. Связь шероховатости и контраста спекл-структуры для источника белого света ( $\lambda = 0,5$  мкм,  $\lambda_c = 1,5$  мкм)

Представляет интерес измерение шероховатости с помощью источника, излучающего широкую полосу спектра. Если освещать шероховатую поверхность монохроматическим и пространственно-когерентным излучением, получаемая спекл-картина будет иметь максимальный контраст. Если же временную когерентность уменьшить, сохранив неизменной пространственную когерентность, то контраст спекл-структуры уменьшится. Этот эффект особенно заметен когда длина когерентности соизмерима с высотой рельефа поверхности. Экспериментальные исследования показывают, что соотношение между контрастом спекл-структуры и шероховатостью почти не зависит от способа получения шероховатой поверхности.

При использовании белого света (длина когерентности  $\lambda_c$  приблизительно равна 1,5 мкм) можно по контрасту спекл-структуры оценивать шероховатость  $\sigma$  в пределах от 0,2 до 3 мкм. Технически данный способ измерения можно реализовать, проецируя изображение исследуемой поверхности на малое отверстие, за которым помещен фотоприемник. Перемещая фотоприемник, измеряют профиль спекл-структуры. Диаметр отверстия должен быть, как минимум в несколько раз меньше характерного размера спекла.

## Корреляционная спекл-интерферометрия

Спекл-интерферометрия это метод измерения, основанный на когерентном сложении (интерференции) поля, имеющего спекл-структуру, с плоской опорной волной или другим полем, имеющим спекл-структуру. Одним из применений этого метода является определение собственных частот и форм колебаний элементов конструкции.

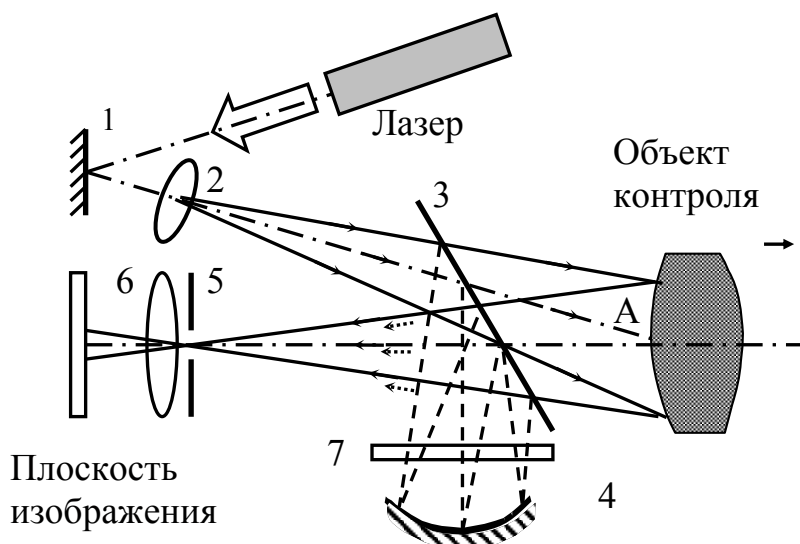


Рис. 8.36. Схема спекл-интерферометра. 1-поворотное зеркало; 2-микрообъектив; 3-светоделительная пластинка; 4-сферическое зеркало; 5-регулируемая диафрагма; 6-объектив CCD; 7-поляризационный светофильтр

В методе электронной корреляционной спекл-интерферометрии формирование системы корреляционных полос осуществляется путем вычитания видеосигналов.

Входную плоскость телекамеры помещают в плоскости изображения интерферометра. Выходной сигнал телекамеры, полученный при исходном положении предмета, записывается в памяти. Затем объект контроля смещается, и сигнал, поступающий с телекамеры, вычитается из записанного в памяти сигнала. В результате те части полученных двух изображений, для которых спеклы остаются скоррелированными, дают нулевой сигнал, тогда как сигнал от некоррелирующих участков отличен от нуля.

Таким образом, мы наблюдаем картину корреляционных полос, отражающую вариации амплитуды колебаний по поверхности предмета. Система получающихся интерференционных полос соответствует смещениям либо в предметной плоскости, либо по нормали к ней. В системах с усреднением по времени удастся наблюдать полосы только для нормальных к поверхности смещений.

Микрообъектив 2 служит для освещения всей поверхности объекта или участка подлежащего контролю. Полупрозрачное зеркало совместно со сферическим зеркалом используется для получения опорного пучка, который,



проходя через диафрагму, создает в плоскости мишени телекамеры равномерную когерентную засветку. Место установки полупрозрачного зеркала выбирается из условия обеспечения равенства оптической длины пути опорного и объектного пучка. Радиус кривизны сферического зеркала выбирается таким образом, чтобы опорный пучок фокусировался в плоскости диафрагмы. Поляризационный фильтр предназначен для регулирования уровня интенсивности опорного пучка. Диафрагма, установленная перед объективом телекамеры, ограничивает входной зрачок объектива телекамеры, и определяет размер минимального спекла. Изменение фазы опорного пучка может осуществляться за счет смещения сферического зеркала. При смещении фазы опорного пучка на изображении наблюдается изменение спекл-картины.

При возбуждении колебаний исследуемого объекта на резонансной частоте спекл-картина размывается до однородной, продолжая наблюдаться только в области узловых линий (см. рис. 8.37).



Рис. 8.37. Характерная картина спекл-интерферограммы

Для того чтобы зарегистрировать формы колебаний на каждой резонансной частоте, в памяти компьютера записывается спекл-изображение. Затем фаза опорного пучка смещается так, чтобы на спекл-изображении фаза изменилась на противоположную, и вновь записывается спекл-изображение. Два спекл-изображения вычитаются по модулю, и на экране монитора наблюдается результат вычитания, представляющий собой спекл-интерферограмму.

#### 8.4. Способы устранения спекл-структуры

Существует два основных приема устранения спеклов и множество способов их реализации.

**Во-первых**, в некоторых случаях спеклы можно сделать меньше, чем детали объекта, представляющего интерес. Размеры спеклов являются дифракционно-ограниченными, так что, если детали объекта крупные, то спеклы становятся "ненаблюдаемыми".

**Во-вторых**, спеклы можно усреднить, используя интегрирование изображения во времени и одновременно осуществляя движение

рассеивателей; используя для подсветки одновременно несколько разных длин волн, изменяя размер апертуры в плоскости регистрации и т.п.

Возможны и другие способы. Все эти способы снижают разрешение изображения ниже дифракционного предела; во всех случаях используется некогерентное сложение изображений. Чтобы свести к минимуму корреляцию спеклов, достаточно очень небольшого движения, так что, сохраняя один из рассеивателей неподвижным и, при этом, вращая или перемещая второй, можно получить изображение, по существу свободное от спеклов за счет усреднения во времени.

### **Влияние усредняющего действия приемной апертуры на величину флуктуаций рассеянного когерентного излучения**

Если размер приемной апертуры больше, чем средний размер спекла, статистика измеренной интенсивности уже не подчиняется закону Рэлея. Хорошей аппроксимацией такой интегрированной интенсивности служит гамма-распределение. В этом случае контраст спекл-структуры уменьшается из-за усреднения спеклов, попадающих в область приемной апертуры. Важно в этом случае уметь оценивать уменьшение контраста из-за усреднения, выполняемого приемной апертурой.

Измеренная интенсивность светового потока, проходящего через приемную апертуру, выражается через распределение интенсивности в спекл-картине как свертка с функцией  $T(x,y)$ , описывающей форму приемной апертуры.

$$I'(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} I(x_1,y_1)T(x-x_1,y-y_1)dx_1dy_1$$

Спектр Винера измеренных флуктуаций интенсивности  $W'(u,v)$  связан со спектром флуктуаций спекл-картины  $W(u,v)$  следующим соотношением

$$W'(u,v) = W(u,v)|b(u,v)|^2,$$

где  $b(u,v)$  фурье-образ функции  $B(x,y)$ , описывающей форму приемной апертуры. Дисперсия флуктуаций измеренной интенсивности выражается как:

$$\sigma_b^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} W(u,v)|b(u,v)|^2 dudv.$$

Возможность подавления спеклов в формирующей изображение системе с шероховатыми поверхностями связана с фундаментальным результатом теории вероятностей - сумма  $N$  одинаково распределенных вещественных некоррелированных случайных величин имеет среднее значение в  $N$  раз, а стандартное отклонение в  $\sqrt{N}$  раз больше среднего значения и стандартного отклонения любого одного компонента.

Исходя из этого, на практике чаще используют упрощенный метод оценки дисперсии флуктуаций измеренной интенсивности рассеянного излучения,

используя предположение, что изображение состоит из некоррелированных спеклов, или ячеек, характерного размера.

Будем считать, что в пределах апертуры содержится  $N$  таких ячеек. Тогда полная комплексная амплитуда  $U$  внутри апертуры запишется в виде

$$U = \sum_{m=1}^N U_m, \text{ где } U_m - \text{ комплексная амплитуда от } m - \text{ ой ячейки. Так как по}$$

предположению  $U_m$  независимы, величину  $U$  можно считать результатом процесса случайных блужданий. Вычисление моментов распределения для этого случая показывает, что контраст регистрируемой спекл-картины оказывается равным  $1/\sqrt{N}$ .

Иначе говоря, **контраст спекл-картины уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из площади апертуры.**

Подобный метод применим лишь для полностью когерентного освещения.

Некоррелированные спекловые картины возникают в том случае, если излучение содержит компоненты, достаточно сильно различающиеся по частоте, поляризации или временной задержке.

Если при отражении излучения от шероховатой поверхности возникает деполяризация излучения, контраст спекл-картины уменьшается. При полной деполяризации контраст спекловой картины уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз.

При освещении поверхности взаимно некогерентным излучением  $N$  лазеров, контраст спекл-картины уменьшается в  $\sqrt{N}$  раз.

Более подробно вопросы изменения контраста изображения при различных условиях облучения поверхности объекта рассмотрены в следующем разделе.

## 9. Теория когерентных изображений

### 9.1. Статистические характеристики когерентных изображений. Контраст изображения

Рассмотрим свойства когерентного изображения для случая, когда цель подсвечивается когерентным излучением, и состоит из двух точечных объектов (Рис. 9.1.). Зададим расположение этих объектов с помощью радиус-векторов  $r_1=(x_1, y_1, z_1)$ ,  $r_2=(x_2, y_2, z_2)$ . И пусть изображение этого объекта строится тонкой линзой.

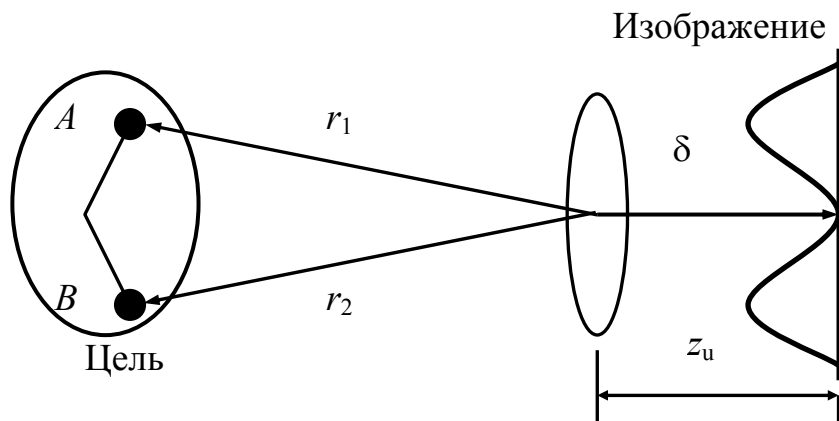


Рис. 9.1. Формирование изображения двухточечного объекта

Линза, формирующая изображение, имеет фокусное расстояние  $f$ :  $1/f=1/r_u+1/z_u$ . В этом случае поле в изображении представляется в виде сумм двух слагаемых, соответствующих изображению двух точечных объектов:

$$E(\delta) \sim k_1 A'(\delta) + k_2 B'(\delta),$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты отражения от точечных объектов  $A$  и  $B$ ;

$\delta$  - радиус вектор изображения.

На рис. 9.2 приведены построенные при различных реализациях  $x_1, x_2$  изображения для случая плоского экрана.

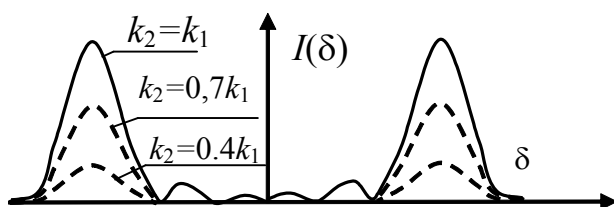


Рис. 9.2. Распределение интенсивности в когерентном изображении двухточечного объекта

Видно, что распределение интенсивности  $I(\delta) = |E(\delta)|^2$  существенно зависит как от  $k_1, k_2$ , и от  $x_1, x_2$ . Естественно считать  $k_1 \approx k_2$ . Если выполняется условие  $x_1 - x_2 < \lambda r_u / d_p$ , то при  $k_1 \approx k_2$  отклики от обоих точечных объектов располагаются практически в одном месте.

Представим далее, что расположение точечных объектов случайно. В данном случае максимальное значение контраста  $C = 0,5$  и достигается оно при равенстве амплитуд изображений источников.

Когерентные изображения объектов, состоящих из точек с достаточно большим случайным разбросом расстояний между ними, сильно флуктуируют, т.е. представляют собой сильно изрезанные по яркости структуры.

Можно предположить, что при увеличении числа точек, составляющих подобные объекты, контраст будет увеличиваться.

Пусть цель состоит из  $n_0$  независимо расположенных точек. В этом случае

$$E(\delta) = E_u \sum_{j=1}^{n_0} A_j \exp(i\varphi_j).$$

Очевидно,  $\varphi_j$  также независимы. В соответствии с условиями формирования нормально-развитой спекл-структуры при  $n_0 \gg 1$ ,  $C \approx 1$ , т.е. контраст в когерентном изображении многоточечного объекта, состоящего из случайно и независимо расположенных точек, разброс по фазе которых существенно превышает длину волны подсвечивающего излучения, стремится к единице.

## 9.2. Учет дискретности спектра подсвечивающего излучения и направления подсвета

### Дискретность спектра подсвечивающего излучения

В реальных условиях подсвечивающее цель излучение никогда не бывает чисто когерентным. Оно может состоять из дискретного или непрерывного набора волн (частот), что приводит к ухудшению временной когерентности излучения. Рассмотрим влияние излучения в виде набора дискретных волн на статистические характеристики изображения.

Изображения, получаемые при фотографировании в белом свете, не имеют пятнистой флуктуационной структуры. Поэтому, можно предположить, что с увеличением числа длин волн подсвечивающего излучения контраст в изображении будет уменьшаться.

Пусть цель состоит из двух случайно расположенных объектов, и в подсвечивающем излучении присутствуют две длины волны. В этом случае результирующая амплитуда поля в изображении цели при его облучении двумя длинами волн

$$E(\delta, t) = E(\omega_1, \delta) \exp(i\omega_1 t) + E(\omega_2, \delta) \exp(i\omega_2 t),$$

где  $E(\omega_j, \delta) \approx E_u [A_1 \exp(i\omega_j z_1 / c) + A_2 \exp(i\omega_j z_2 / c)]$ ;  $\omega_j = 2\pi c / \lambda_j$ ;  $j = 1, 2$ .

Следовательно, интенсивность изображения представляет собой меняющуюся со временем структуру с периодом изменения  $\tau = 1/(\omega_2 - \omega_1)$ .

Разность частот излучения  $\omega_2 - \omega_1$  для оптического диапазона волн обычно велика. Даже при отличии длин волн на  $10^{-5}$  % она составляет порядка 10 МГц.

Характерное время регистрации оптических изображений  $10^{-7}$  с и выше. Следовательно, регистрироваться будет усредненная по времени интенсивность - плотность энергии излучения

$$Q(\delta) = \int_0^T |E(\delta, t)|^2 dt,$$

где  $T$  – время регистрации изображения.

В этом случае имеет смысл говорить только статистических характеристиках величины  $Q(\delta)$ .

$B_{12} = \langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$  - частотная корреляционная функция.

Предположим, что  $z_1 - z_2$  распределено по гауссову закону с

$$\sigma = \sqrt{\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle} \gg \lambda_1, \lambda_2.$$

Если  $(\omega_1 - \omega_2)\sigma/c \gg 1$ ,  $(\omega_1 - \omega_2) \eta_m / c \gg 1$ , то  $C_1 = C/2$ . В противоположном случае  $C_1 \approx C$ . Это значит, что контраст при подсвете двухточечного объекта двумя достаточно разнесенными длинами волн падает в два раза. При слабом разнесении длин волн падение контраста отсутствует.

Например, при  $\sigma = 100\lambda$  разнесение по длинам волн, приводящее к двукратному падению контраста, составляет  $\Delta\lambda = \lambda^2/\sigma \approx 10^{-2} \lambda$ .

При  $\Delta\lambda \ll 10^{-2} \lambda$  падение контраста не происходит.

С физической точки зрения падение контраста в изображении при подсвете объекта сильно разнесенными длинами волн объясняется тем, что в плоскости изображения формируются два или несколько несовпадающих между собой изображения.

Двукратное падение контраста при  $(\omega_1 - \omega_2)\sigma/c \gg 1$  имеет место и при подсвете многоточечного объекта (цели).

В случае, когда многоточечный объект подсвечивается несколькими длинами волн  $\lambda_m = 2\pi c/\omega_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, m_0$  контраст уменьшается в число раз, соответствующее числу длин волн подсвечивающего излучения:  $C_1 = C/m_0$  при  $(\omega_m - \omega_n)\sigma/c \gg 1$ . В противоположном случае  $C_1 = C$ , т. е. контраст такой же, как при подсвете многоточечного объекта одной длиной волны.

Таким образом, контраст в изображении многоточечного объекта со случайным расположением точек меняется от контраста  $C$ , получаемого на одной длине волны, до контраста  $C/m_0$ , имеющего место при условии, что все длины волн удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_m - \lambda_n > \lambda_m \lambda_n / \sigma, \quad m, n = 1, 2, \dots, m_0,$$

где  $m_0$  – кратное падение контраста является следствием сложения  $m_0$  статистически независимых изображений, получаемых на различных длинах волн. Это приводит к  $m_0$  – кратному уменьшению относительной дисперсии суммы этих изображений.

При рассмотрении данного вопроса мы не учитывали корреляционных связей между точками, которые имеют место, если объект непрерывен, не учитывалось также интенсивности каждой из спектральных составляющих и форма объекта.

В случае эквидистантного расположения длин волн облучения относительно  $\lambda$ , результату

$$C_1 = \frac{C}{m_0} = \frac{1}{m_0} \times \frac{\langle (\delta I_1)^2 \rangle}{\langle I_1 \rangle^2}$$

можно дать следующую интерпретацию. Пусть  $\Delta\lambda$  - ширина спектра излучения. Тогда интервал между соседними длинами волн составляет величину  $\Delta\lambda/m_0$ . Условие статистической независимости изображений, получаемых на соседних длинах волн  $\Delta\lambda/m_0 \geq \lambda^2/\sigma$ .

Отсюда  $m_0 \leq \sigma/\lambda_c$ , где  $\lambda_c = \lambda^2/\Delta\lambda$  - параметр, описывающий длину когерентности излучения. Следовательно,  $C_1 = (\lambda_c/\sigma)C$ .

Физический смысл последнего выражения состоит в том, что контраст в изображении, получаемом на широком спектре длин волн, падает во столько раз по сравнению с контрастом изображения, получаемом на одной длине волны, во сколько раз длина когерентности излучения меньше дисперсии расстояния между точками объекта. Этот результат есть следствие того факта, что при  $\lambda_c \ll \sigma$  расстояния между точками объекта столь велики, что их можно мысленно разбить на участки вдоль оси  $z$ , причем эти участки (даже соседние) будут рассеивать излучение, не интерферирующее друг с другом. Число таких статистически независимых полей как раз и составляет  $m_0 = \lambda_c/\sigma$ .

Качественно подобная картина будет иметь место и при произвольном виде спектра. В этом случае  $\Delta\lambda$  - полуширина спектра,  $\lambda_c = \lambda^2/\Delta\lambda$ .

### **Статистические характеристики изображения объекта при его движении и монохроматическом подсвете с разных направлений**

Пусть многоточечный неподвижный объект подсвечивается одновременно с нескольких направлений; источники подсвета расположены в плоскости апертуры линзы, формирующей изображение; начальные фазы излучения источников случайны и независимы.

#### **Двухточечный объект.**

$$E_s = E_{us} \left[ A_1(i\varphi_1) \exp\left(i \frac{2\pi x_1}{\lambda} \sin \theta_s\right) + A_2(i\varphi_2) \exp\left(i \frac{2\pi x_2}{\lambda} \sin \theta_s\right) \right] \exp(i\psi_s),$$

где  $E_{us}$  - амплитуда поля  $j$ -го источника на объекте,  $\theta_s$  - углы падения,  $s = 1, 2$ ;  $\sin \theta_s = \rho_{us} / r_u - \rho_{us}$ ,  $\rho_{us}$  - положение источников,  $\psi_s$  - начальные фазы

источников. Очевидно,  $\langle E_1 E_2^* \rangle_{\text{и}} = 0$ , где  $\langle \rangle_{\text{и}}$  – усреднение по фазам источников.

С учетом этого условия при  $\theta_1 = \theta_2$  имеем  $C_2 = C$ ;

при  $(2\pi/\lambda)(x_1 - x_2)(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = \pi/2 + 2\pi m_0$  получим  $C_2 = C/2$ .

При  $A_1 \neq A_2$   $\langle E_1 E_2^* \rangle$  не обращается в нуль. Таким образом,  $C_2$  является периодической функцией. Двукратное падение контраста объясняется периодической декорреляцией интенсивностей в изображении при изменении угла подсветки  $\theta_2$ .

### Многоточечный объект

Поле в изображении  $E(\delta) = \sum_{s=1}^{m_0} E_s(\delta)$ ,

где  $E_s(\delta) = E_{us} \sum_{j=1}^{n_0} A_j \exp(i\varphi_j) \exp\left[i \frac{2\pi r_j (\rho_{us} + \delta)}{\lambda r_{\text{ц}}}\right] \exp(i\psi_s)$ ,

где  $\rho_{us}$  – радиус-вектор  $s$  – го источника;  $n_0$  – число точек объекта,  $\psi_s$  – фаза источника,  $m_0$  – число источников.

При разнесении источников подсвета объекта на расстояние, большее размеров апертуры линзы  $d_p$ , наступает полная декорреляция между изображениями. С физической точки зрения это объясняется тем, что при изменении направления подсвета объекта поле также поворачивается относительно объекта, но в противоположном направлении.

При повороте поля на угол  $d_p/r_{\text{ц}}$  происходит полная смена одной реализации поля на апертуре линзы на другую реализацию. Это приводит к эффекту декорреляции интенсивностей изображений, получаемых до и после поворота источника подсвета на угол  $d_p/r_{\text{ц}}$ .

Следует отметить, что поворот поля по законам зеркального отражения имеет место лишь при  $n_0 \rightarrow \infty$ . В этом случае многоточечный объект трансформируется в объект со сплошной поверхностью, отражающей по законам, близким к геометрической оптике.

В случае объекта, состоящего из малого числа точек, функция корреляции интенсивностей  $B_{12}$  в изображении не стремится к нулю при изменении направлении подсвета. Для двухточечного объекта она даже периодическая. Это связано с тем, что при изменении направления подсвета подобного объекта законы геометрической оптики не выполняются даже приблизительно.

Учитывая соотношение для функции корреляции интенсивностей  $B_{\text{st}}$  и, полагая, что амплитуды источников равны, а, следовательно,  $\langle I_s \rangle = \langle I_1 \rangle$  найдем контраст изображения, получаемого при подсвете от независимых источников



$$C_2 = \frac{1}{m_0} - \frac{1}{n_0} + 2 \sum_{\substack{s,t=1 \\ s < t}}^{m_0} \frac{|\langle E_s E_t^* \rangle|^2}{m_0^2 \langle I_1 \rangle^2}, \text{ при } s = t, C_2 = 1 - 1/n_0 = C.$$

Таким образом, при совпадении источников, контраст, естественно, сохраняется прежним, как и при подсвете из одного источника. В случае конечного числа  $m_0$  и при достаточно большом числе точек  $n_0$ , составляющих объект происходит декорреляция полей, т.е.  $\langle E_s E_t^* \rangle \approx 0$ . В этом случае  $C_2 \approx 1/m_0$ . Этот результат является следствием наложения  $m_0$  изображений с независимыми полями, что, как известно, приводит к  $m_0$ -кратному падению контраста. Исходный единичный контраст принят в силу предположения, что  $n_0 \rightarrow \infty$ . Условие декоррелируемости полей состоит в том, чтобы источники были разнесены между собой на расстояния большее размеров апертуры линзы  $|\rho_{us} - \rho_{ut}| > d_\rho$ . По аналогии со случаем подсвета объекта различными длинами волн, при котором падение контраста в изображении наступает при условии  $(\lambda_s - \lambda_t)/\lambda_s^2 > \sigma^{-1}$ , можно переписать условие  $|\rho_{us} - \rho_{ut}| > d_\rho$  в виде  $|\rho_{us} - \rho_{ut}| > \lambda_n$ , где  $\lambda_n$  – длина пространственной когерентности источников, равная  $d_\rho$ .

**Таким образом, контраст при подсвете объекта источниками со случайными и независимыми за время наблюдения фазами, что имеет место, например, из-за изменения взаимного расположения источников, с ростом числа подобных источников уменьшается. Такие источники принято считать некогерентными между собой.**

Рассмотрим случай, когда источники расположены внутри области, равной половине апертуры линзы. Для упрощения анализа, расположим их по одной линии, и будем считать, что  $n_0 \rightarrow \infty$ . В этом случае

$$C_2 = \frac{1}{m_0} - \frac{1}{n_0} + \frac{2}{m_0^2} \sum_{\substack{s,t=1 \\ s < t}}^{m_0} \left[ 1 - \frac{d_k(t-s)}{2m_0 d_\rho} \right],$$

где  $d_k$  – расстояние между крайними источниками. Тогда после суммирования по  $s$  и  $t$  получим

$$C_2 = 1 - \frac{1}{n_0} - \frac{d_k}{6d_\rho} \frac{(m_0 - 1)(m_0 + 1)}{m_0^2}.$$

При  $m_0 \gg 1$ ,  $C_2 = C - d_k/6d_\rho$  ( $d_k < d_\rho/2$  по условию),  $C = 1 - 1/n_0$ .

Контраст суммарного изображения в этом случае превышает  $C - 0.1$ . При уменьшении максимального расстояния между источниками  $d_k$  контраст  $C_2$  возрастает и при  $d_k \rightarrow 0$  стремится к  $C$  независимо от числа источников. Рост

размеров апертуры линзы также приводит в этом случае к возрастанию контраста.

К уменьшению контраста приводит также изменение фазовых набегов между соседними точками при изменении направления подсвета объекта.

## ГЛОССАРИЙ

### 1. Когерентность излучения

Характеристика согласованности (корреляции) световых колебаний в различных точках пространства и в различные моменты времени.

### 2. Корреляционная функция

Если вектор напряженности содержит компоненту, случайным образом изменяющуюся по пространственным координатам  $\mathbf{r}$  и по времени  $t$ , то можно построить следующую корреляционную функцию

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по всему пространству и по всему интервалу времени наблюдения.

### 3. Изотропное случайное поле

Однородное случайное поле называется изотропным, если корреляционная функция зависит лишь от абсолютного значения расстояния между двумя точками  $\mathbf{s} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ .

### 4. Стационарное случайное поле

Стационарное случайное поле, это такое поле статистические характеристики которого во времени не меняются,

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1).$$

### 5. Статистически однородное поле

Статистически однородное поле – поле, для которого корреляционная функция зависит лишь от разности  $r_2 - r_1$

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_1, t_2).$$

### 6. Размер зоны когерентности

Расстояние между точками поля, для которого степень пространственной когерентности уменьшаются в заданное число раз.

### 7. Время когерентности

Временной интервал, для которого степень временной когерентности уменьшаются в заданное число раз называются временем когерентности.

### 8. Многомодовое излучение

Излучение, представляющее собой суперпозицию большого числа поперечных мод.

### 9. Одномодовый лазер

Лазер, генерирующий один тип поперечных колебаний.

## 10. Многомодовый лазер

Лазер, генерирующий суперпозицию большого числа поперечных типов колебаний.

## 11. Число Френеля

$$(ka^2 / 2\pi L),$$

где  $k=2\pi/\lambda$ ,  $a$  – радиус зеркала резонатора,  $L$  – база резонатора

## 12. Радиус корреляции

То же, что интервал корреляции

## 13. Техническая ширина линии излучения

Техническая ширина спектральной линии излучения

$$\Delta\omega_T = \sigma_\omega$$

обусловленная, факторами технического порядка, вклад которых зависит от конструкции лазера, стабилизации параметров и т. п. подчеркивая этим, что причиной уширения линии в рассматриваемом случае оказываются факторы технического порядка. Величина  $\Delta\omega_T$  различна для различных типов лазеров.

## 14. Естественная ширина спектральной линии

Ширина спектральной линии изолированного, неподвижного, невозмущенного атома (молекулы). Идеализированное понятие, используемое в физике.

## 15. Добротность резонатора

Величина добротности может быть определена следующим образом

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{\text{суммарные потери энергии когерентного излучения в секунду}}$$

## 16. Теоретическая ширина линии излучения

$$\delta\nu = \frac{8\pi h\nu}{P^{(0)}} (\Delta\nu_{рез})^2,$$

где  $P^{(0)}$  – мощность излучения лазера,  $\Delta\nu_{рез}$  – ширина линии пропускания резонатора.

Абстрактная величина, обеспечение, которой на практике не представляется возможным, что следует из произведения  $\Delta\nu\Delta t = 1$  ( $\Delta t$  – время установления устойчивого режима).

Так как частота генерации определяется длиной базы резонатора, ширина линии будет равна теоретической величине, если выдержать длину базы резонатора с точностью

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta \nu}{\nu} \text{ в течение времени } \Delta t = \frac{1}{\Delta \nu}.$$

Ясно, что из-за механических нестабильностей, теплового дрейфа и других причин такую стабильность длины резонатора выдержать в таком интервале времени практически невозможно.

### 17. Время когерентности

$$\text{Время когерентности } \Delta \tau = \frac{1}{\Delta \nu}.$$

### 18. Длина когерентности

Длина  $\lambda$  называется длиной когерентности и выражается  $\lambda = c\Delta\tau$ .

### 19. Принцип Гюйгенса-Френеля

Принцип Гюйгенса-Френеля - каждая точка на поверхности  $\Sigma$  действует как новый вторичный источник сферических волн. Напряженность поля вторичного источника в точке  $P_1$  пропорциональна  $(j\lambda)^{-1}U(P_1, \nu)$ , и этот источник излучает с амплитудным коэффициентом направленности  $\chi(\theta)$ .

### 20. Функция взаимной когерентности

Определяется аналогичным образом, как и функция когерентности поля.

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \langle u(Q_1, t + \tau)u^*(Q_2, t) \rangle.$$

### 21. Условие квазимонохроматичности излучения

$$\Delta\omega/\omega \ll 1$$

### 22. Взаимная интенсивность

$$J(Q_1, Q_2) = \Gamma(Q_1, Q_2; 0) \rightarrow \tau = 0,$$

### 23. Интервал пространственной когерентности

Расстояние между точками поля, для которых  $|\gamma_{12}| = 0.88$  называется интервалом пространственной когерентности (данное понятие интервала пространственной когерентности введено для источника круглой формы, для источника другой формы его величина может отличаться).

### 24. Теорема Ван Циттерта-Цернике

С точностью до экспоненциального множителя  $\exp(-j\psi)$  и масштабных постоянных взаимную интенсивность  $J(x_1, y_1; x_2, y_2)$  можно найти, выполнив двумерное преобразование Фурье распределения интенсивности  $I(\xi, \eta)$  по поверхности источника.

### 25. Спекл

Английское speckle – пятнышко, крапинка.

### 26. Спекл-картина

Спекл-картина - это интерференционная картина нерегулярных волновых фронтов, образующаяся при падении когерентного излучения на сильно шероховатую поверхность.

### **27. Фокальный объем**

Условно определяемая величина, соответствующая максимальной плотности светового потока в изображении точечного источника. Наибольшая плотность энергии локализована в объеме, напоминающем по форме сигару.

Параметры фокального объема - длина  $\frac{4\lambda}{\alpha^2}$ ; ширина  $-1.22\frac{\lambda}{\alpha}$ , где  $\alpha$  - апертурный угол.

### **28. Объективная спекл-картина**

Объективная спекл-картина формируется во всем пространстве перед освещаемой поверхностью или за пропускающей шероховатой поверхностью.

### **29. Субъективная спекл-картина**

Субъективная спекл-картина возникает при отображении рассеивающей поверхности на экран с помощью оптической системы.

### **30. Размер спекла объективной спекл-картины**

Диаметр  $\varepsilon$  наименьших из спеклов приблизительно равен диаметру дифракционной картины от области, освещаемой лазером на поверхности матовой пластины. Если диаметр области  $2a$ , расстояние от поверхности матовой пластины до плоскости наблюдения  $\lambda$ , то  $\alpha = a/\lambda$  и  $\varepsilon \approx \lambda/\alpha$ .

### **31. Размер спекла субъективной спекл-картины**

Диаметр  $\varepsilon$  наименьших из спеклов приблизительно равен диаметру дифракционной картины от объектива, формирующего изображение. Если диаметр объектива  $2a$ , расстояние от объектива до плоскости наблюдения  $\lambda$ , то  $\alpha = a/\lambda$  и  $\varepsilon \approx \lambda/\alpha$ .

### **32. Спеклы Френеля**

Название дано по аналогии с дифракцией Френеля. Спекл-картина результат интерференции дифрагированных волн. В соответствии с этим спеклы Френеля наблюдаются в зоне дифракции Френеля, т. е. в ближней зоне дифракции. Там где результирующая дифракционная картина еще окончательно не сформировалась и поэтому смещение плоскости наблюдения приводит к нарушению подобия спекл-картин в двух параллельных плоскостях.

### **33. Спеклы Фраунгофера**

Название дано по аналогии с дифракцией Фраунгофера. Спекл-картина результат интерференции дифрагированных волн. В соответствии с этим спеклы Фраунгофера наблюдаются в зоне дифракции Фраунгофера, т. е. в дальней зоне, расстояние до которой находится из условия  $\lambda \gg (2a)^2/\lambda$ , где  $2a$  –

размер зоны освещения шероховатой поверхности (Здесь надо учитывать вид наблюдаемой спекл-картины – объективная или субъективная).

### 34. Условия наблюдения нормально-развитой спекл-картины

Три условия

- **Первое** - случайное блуждание должно состоять из большого числа случайных членов.
- **Второе** - эти члены должны быть независимы друг от друга.
- **Третье** - фазы, связанные с каждым комплексным вкладом, должны быть полностью случайны, т.е. равномерно распределены в главном интервале  $(-\pi, \pi)$

### 35. Случайное блуждание

Сумма множества случайно сфазированных в комплексной плоскости комплексных вкладов

### 36. Центральная предельная теорема

Пусть случайные величины имеют один и тот же закон распределения, среднее значение  $\mu$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Если дисперсия  $\sigma^2$  конечна, то при увеличении объема выборки  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) распределения выборочного среднего  $\bar{x}$  будет стремиться к нормальному распределению со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2/n$ .

### 37. Распределение Рэлея

Распределение Рэлея для интенсивности

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle \exp\left(\frac{I}{\langle I \rangle}\right)},$$

где  $I$  - интенсивность рассеянного излучения,  $P(I)$  - плотность вероятности распределения интенсивности,  $\langle I \rangle$  - средняя или ожидаемая интенсивность.

### 38. Контраст спекл-картины

Фундаментальное свойство распределения Рэлея заключается в том, что для нормально развитой спекл-картины стандартное отклонение точно равно среднему. Таким образом, контраст спекл-картины, определяемый как

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$$

всегда равен единице для поляризованного излучения.

### 39. Теорема Винера-Хинчина

Взаимный энергетический спектр двух случайных процессов равен фурье-образу функции крос-корреляции этих процессов.

#### **40. Индивидуальный спекл**

Индивидуальный спекл - характерный размер элемента спекл-картины за который принимается расстояние между областями с максимальной и минимальной интенсивностями, совпадающее с шириной функции автокорреляции.

#### **41. Опыт Берча-Токарского**

Введение пространственной несущей частоты в оптику и использование техники пространственной фильтрации изображения.

#### **42. Интерференция в диффузном свете**

Явление, обусловленное тем фактом, что излучение, рассеянное одним элементом шероховатой поверхности, сохраняет постоянную разность фаз между лучами, распространяющимися в разных направлениях, и поэтому способных интерферировать.

#### **43. Вычитание изображений**

Способ получения разности двух почти идентичных изображений, основанный на использовании оптической пространственной несущей частоты и техники пространственной фильтрации.

#### **44. Устранение спекл-структуры**

Процесс воздействия на условие формирования или считывания спекл-картины, в результате которого, ее контраст уменьшается.

#### **45. Спекл-интерферометрия**

Метод измерения, основанный на когерентном сложении (интерференции) полей, имеющих спекл-структуру.

#### **46. Корреляционная спекл-интерферометрия**

Метод измерения, основанный на когерентном сложении (интерференции) полей, имеющих спекл-структуру, с плоской опорной волной или другим полем, имеющим спекл-структуру.

#### **47. Спекл-интерферограмма**

Результат вычитания двух спекл-изображений, полученных при использовании опорного пучка, имеющего противоположные фазы.



## *ЛИТЕРАТУРА*

1. Франсон М. Оптика спеклов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1980. – 171 с.
2. Гудмен Дж. Статистическая оптика: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. – 528 с.
3. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 328 с.
4. Клименко И.С. Голография сфокусированных изображений и спекл-интерферометрия. – М.: Наука, 1985. – с.
5. Теория когерентных изображений / П.А. Бакут, В.И. Мандросов, И.Н. Матвеев и др.; Под ред. Н.Д. Устинова. – М.: Радио и связь, 1987. – 264 с.
6. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981. – 640 с.
7. Мэйтлэнд А., Дани М. Введение в физику лазеров: Пер. с англ. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит. 1978. – 407 с.
8. Вайскопф В. Физика в двадцатом столетии. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1977, 272 с.
9. Короленко П.В., Оптические вихри. // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 6. С.94-99.
10. Эшкин А. Давление лазерного излучения // Успехи физических наук, 1973, т. 110, вып. 1, с. 101-116.
11. Janossy M., Csillag L. And Kantor K. The spatial coherence of a He-Ne laser operating at 1.15  $\mu$ , measured with a Mach-Zehnder interferometer // Physics letters 1965. V. 18. № 2. С. 124-125.
12. Афанасьев А.А., Катаркевич В.М., Рубинов А.Н., Эфендиев Т.Ш. Модуляция концентрации частиц в интерференционном поле лазерного излучения // Журнал прикладной спектроскопии, 2002, Т. 69, № 5, с. 675-679.
13. <http://vestnik.vgasu/> Интернет-вестник ВолгГАСУ  
[http://vestnik.vgasu.ru/attahment/3-4\\_1206.pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attahment/3-4_1206.pdf) Э.С. Попов. Лучевая теория дифракции света. 2006. № 6. С. 98-106.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>1. Оптический сигнал и оптическая система</b>	<b>4</b>
1.1. Оптические системы, операторы, функционалы. Типы оптических систем	4
1.2. Оптический сигнал и его преобразование	5
<b>2. Преобразование Фурье</b>	<b>7</b>
2.1. Определение преобразования Фурье	7
2.2. Представление поля в дальней зоне через интеграл Фурье	9
2.3. Основные свойства преобразования Фурье	10
2.4. Двумерные функции	12
2.5. Наиболее часто встречающиеся в оптике специальные функции в связи с применением теории систем и преобразований	13
2.6. Свойства симметрии дифракционной картины	14
2.7. Фурье-образы наиболее часто встречающихся в оптике двумерных сигналов и их свойства	19
2.8. Трансляционная симметрия дифракционной картины	28
2.9. Примеры. Основные свойства преобразования Фурье	31
<b>3. Обобщенные функции. Свертка. Функция корреляции. Пространственная фильтрация</b>	<b>37</b>
3.1 Понятие обобщенных функций. Свойства. Операции	37
3.2. Свертка	39
3.3 Корреляция	41
3.4. Пространственная фильтрация	45
3.5. Примеры	48
<b>4. Дифракция и интерференция света</b>	<b>51</b>
4.1. Дифракция и интерференция света. Определение	51
4.2. Тонкости в толковании термина «дифракция»	52
4.3. Единство и различие явлений дифракция и интерференция	54
4.4. Принцип Бабиня	55
4.5. Контраст дифракционной картины	55
4.6. Геометрическая теория дифракции	59
<b>5. Квантовая природа электромагнитного излучения. Ограничение разрешающей способности оптической системы и информационной емкости оптических сигналов</b>	<b>65</b>
5.1. Квантовая природа электромагнитного излучения	65
5.2. Принцип неопределенности в теории оптического сигнала и теорема Котельникова	70
5.3. Разрешающая сила оптической системы в классическом рассмотрении	73
5.4. Квантовомеханическая модель дифракции монохроматического излучения на щели	77

<b>6. Корреляционные функции и когерентность излучения</b>	<b>80</b>
6.1. Общетеоретические положения	80
6.2. Распространение взаимной когерентности. Распространение световых волн, функция взаимной когерентности	82
6.3. Предельные формы взаимной когерентности. Когерентное поле, некогерентное поле	85
6.4. Теорема Ван Циттерта-Цернике. Значение теоремы и следствия из нее	85
6.5. Дифракция частично когерентного излучения на отверстии	89
6.6. Пример: Дифракция частично когерентного излучения на щели	93
<b>7. Когерентность лазерного излучения</b>	<b>95</b>
7.1. Пространственная когерентность излучения. Многомодовый режим излучения лазера. Радиус корреляции лазерного излучения	95
7.2. Предельная пространственная когерентность излучения одномодового лазера	99
7.3. Временная когерентность излучения лазера	102
7.4. Оптика винтовых полей или сингулярная оптика	106
7.5. Световое давление	111
<b>8. Оптика спеклов</b>	<b>119</b>
8.1. Понятие спекл, объективной и субъективной спекл-картины. Основные свойства спекл-картины, условия формирования	119
8.2. Нормально развитая спекл-картина, условия ее наблюдения, контраст спекл-картины, индивидуальный спекл	135
8.3. Интерференция в диффузном свете. Спекл-интерферометрия. Примеры практического применения.	140
8.4. Способы устранения спекл-структуры	151
<b>9. Теория когерентных изображений</b>	<b>154</b>
9.1. Статистические характеристики когерентных изображений. Контраст изображения	154
9.2. Учет дискретности спектра подсвечивающего излучения и направления подсвета	155
<b>Глоссарий</b>	<b>161</b>
<b>Литература</b>	<b>167</b>
<b>Содержание</b>	<b>168</b>



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

---

#### *КАФЕДРА ЛАЗЕРНОЙ ТЕХНИКИ И БИМЕДИЦИНСКОЙ ОПТИКИ*

Кафедра квантовой электроники и биомедицинской оптики (первоначально - кафедра квантовой радиоэлектроники, затем в 1972 г. кафедра квантовой электроники) организована в 1963 году, всего через три года после создания первого лазера. Кафедра первой в России начала подготовку и выпуск специалистов по новому направлению в науке и технике - квантовой электронике, лазерной физике и технике.

Организовал и долгие годы (до 1987 года) возглавлял кафедру заслуженный деятель науки и техники РСФСР, доктор технических наук, профессор К.И. Крылов. С 1987 г. по 1997 г. кафедру возглавлял ее выпускник - д.т.н., профессор Г.Б. Альтшулер, а с 1997 г. заведующим кафедрой становится д.т.н., профессор В.Ю. Храмов.

С самого начала создания кафедры серьезное внимание было уделено фундаментальной подготовке в области математики и физики, физическому эксперименту, учебно-исследовательской работе студентов.

Интенсивные исследования по применению лазеров в медицине дали кафедре новое название "Кафедра лазерной техники и биомедицинской оптики" (ЛТБМО).

За время существования кафедры подготовлено около полутора тысяч специалистов, свыше 50 выпускников и сотрудников кафедры защитили докторские диссертации и более 20 имеют ученое звание профессора.

При кафедре создан учебно-научно-производственный "Лазерный центр ИТМО". Проводятся совместные исследования и выполняются различные проекты с такими странами, как США, Франция, Австрия, Австралия, Болгария, Германия, Китай, Корея, Аргентина.

Занятия по основам биомедицинской оптики на кафедре проводят ведущие специалисты Санкт-Петербургского государственного медицинского университета им академика И.П. Павлова и других медицинских учреждений.

Кафедра готовит выпускников по специальности 200201 «Лазерная техника и лазерные технологии», а также осуществляет подготовку бакалавров и магистров по направлению 200500 «Лазерная техника и лазерные технологии», кандидатов и докторов по специальностям 05.11.07 "Оптические и оптико-электронные приборы" и 01.04.05 "Оптика".

В настоящее время в учебном процессе кафедры принимают участие 7 профессоров (доктора наук), 19 доцентов (кандидаты наук), 3 старших преподавателя.

Владимир Алексеевич Тарлыков

## КОГЕРЕНТНАЯ ОПТИКА

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

В.А. Тарлыков

Верстка

В.А. Тарлыков

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного  
университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
Санкт-Петербургского государственного  
университета информационных технологий,  
механики и оптики  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

